Questão 1 (Noções básicos)

(1) (f) O conjunto de variáveis livres é $\{y\}$.

(2) (v) Uma derivação no sistema de tipos é

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\gamma' \vdash f : \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}}\ \text{t-ident} \qquad \overline{\gamma' \vdash x : \mathrm{Int}}\ \text{t-ident}}{\gamma' = \gamma[f \mapsto \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}][x \mapsto \mathrm{Int}] \vdash f\,x : \mathrm{Int}}\ \text{t-app}}{\gamma[f \mapsto \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}] \vdash \lambda x : \mathrm{Int}.f\,x : \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}}\ \text{t-function}}{\gamma \vdash \lambda f : \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}.\lambda x : \mathrm{Int}.f\,x : (\mathrm{Int} \to \mathrm{Int}) \to \mathrm{Int} \to \mathrm{Int}}\ \text{t-function}$$

(3) (f) $\mathbb{Z} \cup \{\omega\}$ não tem limite inferior mínimo.

(4) (f) Suponhe $(\mathbb{N} \cup \{\omega, \omega_1, \omega_2\}, \leq)$ com uma extensão de $\leq$ tal que $n \leq \omega_1$, $n \leq \omega_2$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $\omega_1 \leq \omega$ e $\omega_2 \leq \omega$, e tal que $\leq$ é fechada reflexivamente e transitivamente. Logo ω é um limite superior do conjunto inteiro, mas a cadeia ascendente $1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3 \sqsubseteq \cdots$ não tem limite superior mínimo.

(5) (v) $\mathbb{N}$ tem um menor elemento (0 ou 1, dependendo da definição) e com ω a ordenação $\leq$ é completo.

(6) (f) Se $\sigma(x) = 0$, $\sigma = g_2\,\sigma \not\sqsubseteq g_3\,\sigma = \perp$.

(7) (f) Se $\sigma(x) \neq 0$, $\sigma = g_3\,\sigma \not\sqsubseteq g_2\,\sigma = \perp$.

(8) (v) A equação correspondente é

$$F(f) = \mathrm{cond}(B[\![\texttt{¬(x=0)}]\!], f, \mathrm{id})$$

e $F(g_2) = g_2$.

(9) (v) A equação correspondente é

$$F(f) = \mathrm{cond}(B[\![\texttt{x=0}]\!], f, \mathrm{id})$$

e temos que

$$F(g_3) = \begin{cases} \perp & \text{se } \sigma(x) = 0 \\ \sigma & \text{caso contrário} \end{cases} = g_3.$$

(10) (v) A equação correspondente é

$$F(f) = \mathrm{cond}(B[\![\texttt{true}]\!], f, \mathrm{id}) = f$$

e logo cada função $\in [\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp]$ é um ponto fixo dela.

Questão 2 (Monotonia e continuidade)

Uma função $f : D \to D$ sobre um conjunto parcialmente ordenado $(D, \sqsubseteq)$ é monotônica, se para qualquer $d_1, d_2 \in D$ tal que $d_1 \sqsubseteq d_2$, também $f(d_1) \sqsubseteq f(d_2)$. Uma função monotônica *preserve a ordem dos elementos*. Uma função $f : D \to D$ sobre um conjunto parcialmente ordenado completo $(D, \sqsubseteq)$ é contínua, se para cada cadeia ascendente $d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq \cdots$ temos que $f\left(\bigsqcup_{i\geq 0} d_i\right) = \bigsqcup_{i \geq 0} f(d_i)$. Uma função contínua *preserve limites superiores mínimos.*

Questão 3 (Aplicação da semântica denotational)

Temos a equivalência

$$\begin{aligned} C[\![\texttt{dobro}\ \mathbf{c}\ \texttt{se}\ \mathbf{b}]\!] &= C[\![\mathbf{c}\texttt{;if}\ \mathbf{b}\ \texttt{then}\ \mathbf{c}\ \texttt{else skip}]\!] \\ &= C[\![\texttt{if}\ \mathbf{b}\ \texttt{then}\ \mathbf{c}\ \texttt{else skip}]\!] \circ C[\![\mathbf{c}]\!] \\ &= \mathrm{cond}(B[\![\mathbf{b}]\!], C[\![\mathbf{c}]\!], \mathrm{id}) \circ C[\![\mathbf{c}]\!]. \end{aligned}$$

Questão 4 (Avaliação da semântica denotational)
A equação semântica para o laço dado é

$$C[\![\texttt{while ... n:=5-2*n}]\!] = \text{fix}\, F$$
$$\text{com } F(f) = \text{cond}(B[\![n > 0]\!], f \circ C[\![\texttt{n:=5-2*n}]\!], \text{id})$$

e com

$$C[\![\texttt{n:=5-2*n}]\!] =$$
$$= (\lambda\sigma \in \Sigma_\perp.\sigma[n \mapsto 5 - 2\sigma(n)])$$

obtemos

$$F(f)\sigma = \begin{cases} f(\sigma[n \mapsto 5 - 2\sigma(n)]) & \text{se } \sigma(n) > 0 \\ \sigma & \text{se } \sigma(n) \leq 0. \end{cases}$$

(a) Com as equações acima, temos

$$F^0(\perp) = \perp$$
$$F^1(\perp)\sigma = \begin{cases} \perp & \text{se } \sigma(n) > 0 \\ \sigma & \text{se } \sigma(n) \leq 0 \end{cases}$$
$$F^2(\perp)\sigma = \begin{cases} \sigma[n \mapsto 5 - 2\sigma(n)] & \text{se } \sigma(n) \geq 3 \\ \perp & \text{se } \sigma(n) \in \{1,2\} \\ \sigma & \text{se } \sigma(n) \leq 0 \end{cases}$$
$$F^3(\perp)\sigma = \begin{cases} \sigma[n \mapsto 5 - 2\sigma(n)] & \text{se } \sigma(n) \geq 3 \\ \perp & \text{se } \sigma(n) = 2 \\ \sigma[n \mapsto -1] & \text{se } \sigma(n) = 1 \\ \sigma & \text{se } \sigma(n) \leq 0 \end{cases}$$

(b) Na próximas iterações obtemos

$$F^4(\perp)\sigma = \begin{cases} \sigma[n \mapsto 5 - 2\sigma(n)] & \text{se } \sigma(n) \geq 3 \\ \sigma[n \mapsto -1] & \text{se } \sigma(n) \in \{1,2\} \\ \sigma & \text{se } \sigma(n) \leq 0 \end{cases}$$
$$F^5(\perp)\sigma = F^4(\perp)\sigma$$

e logo achamos o menor ponto fixo do F que é o limite superior mínimo da cadeia $F^i(\perp)$.

Questão 5 (Questão extra)
A idéia principal é que um `break` proibe a execução dos comandos seguintes no mesmo escopo de uma laço `while`. Por isso introduzimos (na semântica operacional estrutural)

$$\frac{}{\texttt{break;c}, \sigma \to \texttt{break}, \sigma}$$

Os regras para `while` devem ser modificas tal que `break` tem efeito somente no escopo da laço correspondente. Por isso introduzimos um escopo `body` **c** `of` **w** em que **w** representa um laço while, junto com as seguintes regras

$$\frac{}{\texttt{while}\ \mathbf{b}\ \texttt{do}\ \mathbf{c}, \sigma \to \texttt{if}\ \mathbf{b}\ \texttt{then (body}\ \mathbf{c}\ \texttt{of}\ \mathbf{w}\texttt{) else skip}, \sigma}$$

$$\frac{\mathbf{c}, \sigma \to \mathbf{c}', \sigma'}{\texttt{body}\ \mathbf{c}\ \texttt{of}\ \mathbf{w}, \sigma \to \texttt{body}\ \mathbf{c}'\ \texttt{of}\ \mathbf{w}, \sigma'}$$

que delimite a execução do escopo. Assim, a execução de um escopo termina com `skip` ou `break` que permite para as seguintes regras de difereciar os casos

$$\frac{}{\texttt{body skip of }\ \mathbf{w},\sigma \rightarrow \mathbf{w},\sigma}$$

$$\frac{\mathbf{c},\sigma \rightarrow \mathbf{c}',\sigma'}{\texttt{body break of }\ \mathbf{w},\sigma \rightarrow \texttt{skip},\sigma}$$

Exemplo: Com $\sigma(n) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
& \texttt{while true do (if (n=0) then break else skip); n:=1},\sigma \\
\rightarrow\ & \texttt{if true do (body if (n=0) then break else skip of while ...); n:=1},\sigma \\
\rightarrow\ & \texttt{body if (n=0) then break else skip of while ...); n:=1},\sigma \\
\rightarrow\ & \texttt{body break of while ...; n:=1},\sigma \\
\rightarrow\ & \texttt{skip; n:=1},\sigma \\
\rightarrow\ & \texttt{n:=1},\sigma \\
\rightarrow\ & \texttt{skip},\sigma[n \mapsto 1]
\end{aligned}$$