Lista de soluções 3

Exercício 1 (Derivações)

1.

$$\begin{aligned}
& \texttt{if x<0 then s:=-1 else (if x = 0 then s:=0 else s:=1)}, \sigma \\
\to\ & \texttt{if x = 0 then s:=0 else s:=1}, \sigma \\
\to\ & \texttt{s:=1}, \sigma \\
\to\ & \sigma[s \mapsto 1]
\end{aligned}$$

2. Seja $c \equiv$ `f:=f1+f2; f1:=f2; f2:=f; x:=x-1`.

$$\begin{aligned}
& \texttt{f1:=1; f2:=1; while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma \\
\to\ & \texttt{f2:=1; while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 1] \\
\to\ & \texttt{while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 1] \\
\to\ & \texttt{if }\neg\texttt{(x<1) (c;while }\neg\texttt{(x<1) do c) else skip}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 1] \\
\to\ & \texttt{(f:=f1+f2; f1:=f2; f2:=f; x:=x-1); while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 1] \\
\to\ & \texttt{(f1:=f2; f2:=f; x:=x-1); while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 1][f \mapsto 2] \\
\to\ & \texttt{(f2:=f; x:=x-1); while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 1][f \mapsto 2] \\
\to\ & \texttt{(x:=x-1); while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 2][f \mapsto 2] \\
\to\ & \texttt{while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 2][f \mapsto 2][x \mapsto 1] \\
\to\ & \texttt{if }\neg\texttt{(x<1) (c;while }\neg\texttt{(x<1) do c) else skip}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 2][f \mapsto 2][x \mapsto 2] \\
\to\ & \texttt{(f:=f1+f2; f1:=f2; f2:=f; x:=x-1); while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 2][f \mapsto 2][x \mapsto 2] \\
\to\ & \texttt{(f1:=f2; f2:=f; x:=x-1); while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 2][f \mapsto 3][x \mapsto 2] \\
\to\ & \texttt{(f2:=f; x:=x-1); while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 2][f2 \mapsto 2][f \mapsto 3][x \mapsto 2] \\
\to\ & \texttt{x:=x-1; while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 2][f2 \mapsto 3][f \mapsto 3][x \mapsto 2] \\
\to\ & \texttt{while }\neg\texttt{(x<1) do c}, \sigma[f1 \mapsto 2][f2 \mapsto 3][f \mapsto 3][x \mapsto 0] \\
\to\ & \texttt{if }\neg\texttt{(x<1) (c;while }\neg\texttt{(x<1) do c) else skip}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 2][f \mapsto 2][x \mapsto 0] \\
\to\ & \texttt{skip}, \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 2][f \mapsto 2][x \mapsto 0] \\
\to\ & \sigma[f1 \mapsto 1][f2 \mapsto 2][f \mapsto 2][x \mapsto 0]
\end{aligned}$$

Exercício 2 (Expressões booleanas condicionais)

1.

$$\frac{\mathbf{b_1}, \sigma \Downarrow \text{true} \quad \mathbf{b_2}, \sigma \Downarrow t}{\texttt{if } \mathbf{b_1} \texttt{ then } \mathbf{b_2} \texttt{ else } \mathbf{b_3}, \sigma \Downarrow t}\ \text{b-if}$$

$$\frac{\mathbf{b_1}, \sigma \Downarrow \text{false} \quad \mathbf{b_3}, \sigma \Downarrow t}{\texttt{if } \mathbf{b_1} \texttt{ then } \mathbf{b_2} \texttt{ else } \mathbf{b_3}, \sigma \Downarrow t}\ \text{b-if}$$

2. Seja $i \equiv$ `if` true `then` (false$\wedge$true).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{false}, \sigma \Downarrow \text{false}}\,\text{bool} \quad \dfrac{}{\text{false}, \sigma \Downarrow \text{false}}\,\text{bool}}{\text{false} \wedge \text{false}, \sigma \Downarrow \text{false}}\,\wedge \quad \dfrac{\dfrac{}{\text{true}, \sigma \Downarrow \text{true}}\,\text{bool}}{\neg\text{true}, \sigma \Downarrow \text{false}}\,\text{not}}{\dfrac{\texttt{if (}\text{false} \wedge \text{false}\texttt{) then } \mathbf{i} \texttt{ else } \neg\text{true}, \sigma \Downarrow \text{false}}{\neg\texttt{(if (}\text{false} \wedge \text{false}\texttt{) then } \mathbf{i} \texttt{ else } \neg\text{true}\texttt{)}, \sigma \Downarrow \text{true}}\,\text{not}}\,\text{b}-\text{if}$$

Exercício 3 (Estados intermediarios)

1. Prova com indução natural para $k \geq 0$. O propriedade para provar e

$$P(k) = \Big(\mathbf{S_1}\,;\mathbf{S_2}, \sigma_0 \rightarrow^k \sigma_2 \rightarrow \exists k_1, k_2 : (\mathbf{S_1}, \sigma_0 \rightarrow^{k_1} \sigma_1) \wedge (\mathbf{S_2}, \sigma_1 \rightarrow^{k_2} \sigma_2)\Big)\,.$$

   Base: Com $k = 0$ temos $P(0)$ está válido, porque $\mathbf{S_1}\,;\mathbf{S_2}, \sigma_0 \rightarrow^0 \sigma_2$ não está válido: $\mathbf{S_1}\,;\mathbf{S_2}, \sigma_0$ e σ_2 são diferente, e assim, a implicação está válida.

   Passo: Suponha $P(k)$. Para provar $P(k+1)$, suponha também $\mathbf{S_1}\,;\mathbf{S_2}, \sigma_0 \rightarrow^{k+1} \sigma_2$. Logo, seguinda a definição de $\rightarrow$ tem um estado γ tal que $\mathbf{S_1}\,;\mathbf{S_2}, \sigma_0 \rightarrow \gamma \rightarrow^k \sigma_2$. A primeria transição é o resultado da aplicação de umas das regras

$$\dfrac{\mathbf{c_1}, \sigma \rightarrow \mathbf{c_1'}, \sigma'}{\mathbf{c_1}\,;\mathbf{c_2}, \sigma \rightarrow \mathbf{c_1'}\,;\mathbf{c_2}, \sigma'}\,\text{seq} \qquad \dfrac{\mathbf{c_1}, \sigma \rightarrow \sigma'}{\mathbf{c_1}\,;\mathbf{c_2}, \sigma \rightarrow \mathbf{c_2}, \sigma'}\,\text{seq}$$

   No segundo caso, com $\sigma = \sigma_0$, escolhe $\sigma_1 = \sigma'$, $k_1 = 1$ e $k_2 = k$ é $P(k+1)$ está válido.

   No primeiro caso, temos $\gamma = \mathbf{c_1'}\,;\mathbf{c_2}, \sigma'$ e a hipótese da indução se aplica em $\gamma \rightarrow^k \sigma_2$ resultando em k_1', k_2' e um estado σ_1 tal que $\mathbf{c_1'}, \sigma' \rightarrow^{k_1} \sigma_1$ e $\mathbf{c_2}, \sigma_1 \rightarrow^{k_2} \sigma_2$ com $k = k_1' + k_2'$. Assim obtemos, com $k_1 = k_1' + 1$ e $k_2 = k_2'$ que $\mathbf{S_1}, \sigma_0 \rightarrow^{k_1} \sigma_1$ e $\mathbf{S_2}, \sigma_1 \rightarrow^{k_2} \sigma_2$, que prova $P(k+1)$.

2. Escolhe o comando `skip; while true do x:=x+1` e σ tal que $\sigma(x) = 0$, por exemplo. Temos `skip; while true do x:=x+1`, $\sigma \rightarrow$ `while true do x:=x+1`, $\sigma[x \mapsto 1]$ (uma iteração do laço), mas obviamente `skip`, $\sigma \not\rightarrow^* \sigma[x \mapsto 1]$.

Exercício 4 (Expressões com efeitos colaterais)

1. Aumenta a regras das expressões aritméticas com

$$\dfrac{\texttt{l:=l+1}, \sigma \rightarrow \sigma' \quad \mathbf{l}, \sigma \rightarrow \texttt{n}, \sigma}{\mathbf{l}\texttt{++}, \sigma \rightarrow \texttt{n}, \sigma'}\,\text{postincr}$$

2. Aumenta a regras das expressões aritméticas com

$$\dfrac{\texttt{c}, \sigma \rightarrow \sigma' \quad \mathbf{a}, \sigma' \rightarrow \texttt{n}, \sigma'}{\texttt{do } \mathbf{c} \texttt{ result is } \mathbf{a}, \sigma \rightarrow \texttt{n}, \sigma'}\,\text{result-is}$$

3. Neste caso não tem derivações infinitas (em ambos casos só tem uma regra para aplicar, que resulta numa expressão aritmética simples). Por isso é suficiente de provar

$$\texttt{do } \mathbf{l}\texttt{:=}\mathbf{l}\texttt{+1 result is } \mathbf{l}\texttt{-1}, \sigma \rightarrow^* \gamma \leftrightarrow \mathbf{l}\texttt{++}, \sigma \rightarrow^* \gamma$$

para estados finais o parados γ. Suponha `do l:=l+1 result is l-1`$, \sigma \to^* \gamma$. A única regra a aplicar é a regra acima. Seja σ tal que $\sigma(l) = n$ para qualquer n, a regra tem que ter as premissas `l:=l+1`$, \sigma \to \sigma[l \mapsto n+1]$ e `l-1`$, \sigma[l \mapsto n+1] \to$ `n`$, \sigma[l \mapsto n+1]$. Mas com isso, a regra postincr permite de chegar no mesmo estado `n`$, \sigma[l \mapsto n+1]$. O argumento no caso contrário é analogo.

Exercício 5 (Interpredador de IMP)
Veja a página.