Lista de soluções 2

Exercício 1 (Indução)
(a) Indução sobre o número dos símbolos $|s| = n$ na cadeia s. Base: Com $n = 0$, temos $s = \epsilon$. Logo $as = sb$ não é válido, porque $a \neq b$. Passo: Suponha que não tem cadeias de tamanho n tal que $as = sb$. Suponha também, que tem uma cadeia s' de tamanho $n+1$ tal que $as' = s'b$. s' tem que ter a forma $s' = at$ com uma cadeia $|t| = n$ porque o primeiro símbolo é iqual. Temos $aat = atb$, que implica que $at = tn$, uma contradição. Logo, não tem uma cadeia s' de tamanho $n+1$ tal que $as' = s'b$.
(b) Para aplicar a indução bem fundada vamos usar o conjunto S^* e podemos escolher, por exemplo, a relação $\prec$ tal que $s \prec s'$ se s é uma subcadeia de s'. $\prec$ é bem fundada. Com a característica $P(s) = (as \neq sb)$, queremos provar $\forall s \in S^* : P(s)$. Seguindo o princípio da indução bem fundada temos que provar o seguinte:

$$\forall s \in S^* : \big(\forall s' \prec s.P(s')\big) \to P(s)$$

Seja $s \in S^*$ e suponha que $\forall s' \prec s.P(s')$ – para todas as subcadeias s': $as' \neq s'b$ (hipótese da indução). Suponha mais, que $\neg P(s)$: $as = sb$. Então $s \neq \epsilon$, porque $a \neq b$. Assim, com o mesmo argumento do caso (a) s tem quer ter a forma $s = at$ para uma subcadeia t e $at = tb$, uma contradição com a hipótese da indução. Logo, $P(s)$ e $(\forall s' \prec s.P(s')) \to P(s)$.

Exercício 2 (Expressões determinísticos)
A característica nos queremos provar é

$$P(\mathbf{b}) = \Big(\forall \sigma \in \Sigma : \big(\mathbf{b}, \sigma \Downarrow t_1 \wedge \mathbf{b}', \sigma \Downarrow t_2\big) \to t_1 = t_2\Big).$$

Temos os seguintes casos:

$\mathbf{b} \equiv t \in$ Bool: A única regra é $\dfrac{}{\mathbf{t}, \sigma \Downarrow t}\,\text{bool}$. Logo, $t_1 = t_2 = t$.

$\mathbf{b} \equiv \mathbf{a_1} = \mathbf{a_2}$: Temos as duas regras

$$\frac{\mathbf{a_1}, \sigma \Downarrow n_1 \qquad \mathbf{a_2}, \sigma \Downarrow n_2}{\mathbf{a_1}\mathbf{=}\mathbf{a_2}, \sigma \Downarrow \text{true}}\,\text{eq (se } n_1 = n_2\text{)}$$
$$\frac{\mathbf{a_1}, \sigma \Downarrow n_1 \qquad \mathbf{a_2}, \sigma \Downarrow n_2}{\mathbf{a_1}\mathbf{=}\mathbf{a_2}, \sigma \Downarrow \text{false}}\,\text{eq (se } n_1 \neq n_2\text{)}$$

Como as expressões aritméticas são deterministicas, temos $\mathbf{a_1}, \sigma \Downarrow n_1$ e $\mathbf{a_2}, \sigma \Downarrow n_2$ com n_1 e n_2 determinado, não ambigua. Assim, no caso $n_1 = n_2$ a única regra que pode ser aplicada é a primeira, e o resultado é $t_1 = t_2 =$ true. No segundo caso, o resultado é $t_1 = t_2 =$ false.

$\mathbf{b} \equiv \mathbf{a_1} < \mathbf{a_2}$: O argumento é igual com o caso precedente.

$\mathbf{b} \equiv \mathbf{b_1} \wedge \mathbf{b_2}$: Suponha $P(\mathbf{b_1})$ e $P(\mathbf{b_2})$ (hipótese). Temos as duas regras

$$\frac{\mathbf{b_1}, \sigma \Downarrow t_1 \qquad \mathbf{b_2}, \sigma \Downarrow t_2}{\mathbf{b_1} \ \wedge \ \mathbf{b_2}, \sigma \Downarrow \text{true}}\,\wedge\ \text{(se } t_1 = \text{true e } t_2 = \text{true)}$$
$$\frac{\mathbf{b_1}, \sigma \Downarrow t_1 \qquad \mathbf{b_2}, \sigma \Downarrow t_2}{\mathbf{b_1} \ \wedge \ \mathbf{b_2}, \sigma \Downarrow \text{false}}\,\wedge\ \text{(se } t_1 = \text{false ou } t_2 = \text{false)}$$

Se $\mathbf{b}, \sigma \Downarrow t$ e $\mathbf{b}, \sigma \Downarrow t'$ em ambos casos temos as premissas $\mathbf{b_1}, \sigma \Downarrow t_1$, $\mathbf{b_2}, \sigma \Downarrow t_2$ e $\mathbf{b_1}, \sigma \Downarrow t_1'$, $\mathbf{b_2}, \sigma \Downarrow t_2'$, respetivamente. Mas a hipótese implica que $t_1 = t_1'$ e $t_2 = t_2'$, e logo, usando qualquer regra, $t = t'$.

$\mathbf{b} \equiv \mathbf{b_1} \vee \mathbf{b_2}$: O argumento é igual com o caso precedente.

$\mathbf{b} \equiv \neg\mathbf{b_1}$: Temos as regras

$$\frac{\mathbf{b},\sigma \Downarrow \text{true}}{\neg\mathbf{b},\sigma \Downarrow \text{false}}\,\text{not} \qquad \frac{\mathbf{b},\sigma \Downarrow \text{false}}{\neg\mathbf{b},\sigma \Downarrow \text{true}}\,\text{not}$$

A hipótese é $P(\mathbf{b_1})$. Se $\mathbf{b},\sigma \Downarrow t$ e $\mathbf{b},\sigma \Downarrow t'$ em ambos casos temos a premissa $\mathbf{b_1},\sigma \Downarrow t_1$ e $\mathbf{b_1},\sigma \Downarrow t_2$. A hipótese implica $t_1 = t_2$, e logo, usando qualquer regra, $t = t'$.

Exercício 3 (Expressões totais)
(a) Expressões aritméticas
A característica que nos queremos provar e $P(\mathbf{a}) = (\forall\sigma \in \Sigma : \exists n : \mathbf{a},\sigma \Downarrow n)$.

$\mathbf{a} \equiv \mathbf{n}$: Para qualquer σ a regra num implica que $\mathbf{n},\sigma \Downarrow n$, logo $\exists n : \mathbf{a},\sigma \Downarrow n$.

$\mathbf{a} \equiv \mathbf{l}$: Para qualquer σ a regra loc implica que $\mathbf{l},\sigma \Downarrow \sigma(\mathbf{l})$, logo $\exists n : \mathbf{a},\sigma \Downarrow n$ $(n = \sigma(\mathbf{l}))$.

$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}$: Usando a hipótese $P(\mathbf{a_1})$ e $P(\mathbf{a_2})$ para qualquer σ temos n_1 e n_2 tal que $\mathbf{a_1},\sigma \Downarrow n_1$ e $\mathbf{a_2},\sigma \Downarrow n_2$. A aplicação da regra sum resulta em $\mathbf{a},\sigma \Downarrow n$, com $n = n_1 + n_2$, logo $\exists n : \mathbf{a},\sigma \Downarrow n$.

$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a_1} - \mathbf{a_2}$: O argumento é igual com o caso precedente.

$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a_1} \times \mathbf{a_2}$: O argumento é igual com o caso precedente.

(b) Expressões booleanas
A característica que nos queremos provar e $P(\mathbf{b}) = (\forall\sigma \in \Sigma : \exists t : \mathbf{b},\sigma \Downarrow t)$.

$\mathbf{b} \equiv \mathbf{t}$: Para qualquer σ a regra bool implica que $\mathbf{b},\sigma \Downarrow t$, logo $\exists n : \mathbf{b},\sigma \Downarrow t$.

$\mathbf{b} \equiv \mathbf{a_1} = \mathbf{a_2}$: Com o resultado do (a) temos n_1 e n_2 tal que $\mathbf{a_1},\sigma \Downarrow n_1$ e $\mathbf{a_2},\sigma \Downarrow n_2$. Assim, a aplicação de uma das regras eq, implica $\mathbf{b},\sigma \Downarrow t$, logo $\exists t : \mathbf{b},\sigma \Downarrow t$.

$\mathbf{b} \equiv \mathbf{a_1} < \mathbf{a_2}$: O argumento é igual com o caso precedente.

$\mathbf{b} \equiv \mathbf{b_1} \wedge \mathbf{b_2}$: Usando a hipótese $P(\mathbf{b_1})$ e $P(\mathbf{b_2})$ para qualquer σ temos t_1 e t_2 tal que $\mathbf{b_1},\sigma \Downarrow t_1$ e $\mathbf{b_2},\sigma \Downarrow t_2$. A aplicação da regra $\wedge$ resulta em $\mathbf{b},\sigma \Downarrow t$ com $t = \text{true}$, se $t_1 = \text{true}$ e $t_2 = \text{true}$ e $t = \text{false}$, senão. Logo $\exists t : \mathbf{b},\sigma \Downarrow t$.

$\mathbf{b} \equiv \mathbf{a_1} \vee \mathbf{a_2}$: O argumento é igual com o caso precedente.

$\mathbf{b} \equiv \neg\mathbf{b_1}$: A hipótese $P(\mathbf{b_1})$ garante a existencia de t_1 tal que $\mathbf{b_1},\sigma \Downarrow t_1$. Logo, usando uma das regras not, $\exists t : \mathbf{b},\sigma \Downarrow t$.

Exercício 4 (Semântica operacional estrutural de IMP)
Seja $\mathbf{c} \equiv$ `y:=y×x; x:=x-1` e $\mathbf{w} \equiv$ `while ¬(x=0) do` $\mathbf{c}$.

$$\begin{aligned}
\texttt{y:=1;}\mathbf{w}, \sigma &\to \mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 1] \\
&\to \texttt{if } \neg\texttt{(x=0) then } \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w} \texttt{ else skip}, \sigma[y \mapsto 1] \\
&\to \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 1] \\
&\to \texttt{x:=x-1;}\mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 3] \\
&\to \mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 3][x \mapsto 2] \\
&\to \texttt{if } \neg\texttt{(x=0) then } \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w} \texttt{ else skip}, \sigma[y \mapsto 3][x \mapsto 2] \\
&\to \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 3][x \mapsto 2] \\
&\to \texttt{x:=x-1;}\mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 6][x \mapsto 2] \\
&\to \mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 6][x \mapsto 1] \\
&\to \texttt{if } \neg\texttt{(x=0) then } \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w} \texttt{ else skip}, \sigma[y \mapsto 6][x \mapsto 1] \\
&\to \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 6][x \mapsto 1] \\
&\to \texttt{x:=x-1;}\mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 6][x \mapsto 1] \\
&\to \mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 6][x \mapsto 0] \\
&\to \texttt{if } \neg\texttt{(x=0) then } \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w} \texttt{ else skip}, \sigma[y \mapsto 6][x \mapsto 0] \\
&\to \texttt{skip}, \sigma[y \mapsto 6][x \mapsto 0] \\
&\to \sigma[y \mapsto 6][x \mapsto 0]
\end{aligned}$$

Exercício 5 (Semântica operacional estrutural de IMP)
Prova com indução natural, com a característica

$$P(n) = (\sigma(x) = n \wedge \sigma(y) = m \to \mathbf{w}, \sigma \to^* \sigma[x \mapsto 0][y \mapsto mn!])$$

para $n \geq 0$.

Base: Se $\sigma(x) = 0$ e $\sigma(y) = m$ temos $\mathbf{w}, \sigma \to \texttt{if } \neg\texttt{(x=0) then } \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w} \texttt{ else skip}, \sigma \to \texttt{skip}, \sigma \to \sigma$ e $\sigma = \sigma[y \mapsto m][x \mapsto 0]$. Logo, $\mathbf{w}, \sigma \to^* \sigma[x \mapsto 0][y \mapsto mn!]$

Passo: Suponha $P(n)$: Se $\sigma(x) = n$ e $\sigma(y) = m$ temos $\mathbf{w}, \sigma \to^* \sigma[x \mapsto 0][y \mapsto mn!]$. Então, se $\sigma(x) = n + 1$ e $\sigma(y) = m$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}, \sigma &\to \texttt{if } \neg\texttt{(x=0) then } \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w} \texttt{ else skip}, \sigma \\
&\to \mathbf{c}\texttt{;}\mathbf{w}, \sigma \\
&\to \texttt{x:=x-1;}\mathbf{w}, \sigma[y \mapsto m(n+1)] \\
&\to \mathbf{w}, \sigma[y \mapsto m(n+1)][x \mapsto n]
\end{aligned}$$

A hipótese então implica que

$$\mathbf{w}, \sigma[y \mapsto m(n+1)][x \mapsto n] \to^* \sigma[y \mapsto m(n+1)n!][x \mapsto 0] = \sigma[y \mapsto m(n+1)!][x \mapsto 0].$$

Usando essa característica, podemos provar que com $\sigma(x) = n$,

$$\texttt{y:=1;}\mathbf{w}, \sigma \to \mathbf{w}, \sigma[y \mapsto 1] \to^* \sigma[x \mapsto 0][y \mapsto n!].$$