Lista de soluções 9

Exercício 1 (Domínios)

(a) A relação | é uma ordenação parcial, que não é completo. Um contra-exemplo é a cadeia ascendente

$$1|2|4|8|16|\cdots|2^n|\cdots$$

que não tem limite superior.

(b) $(C \cup \{\perp\}, \sqsubseteq)$ é um domínio. A prova detalhada é:

- $\sqsubseteq$ é uma ordenação parcial. Da definição temos que ela é reflexivo ($\forall e : e \sqsubseteq e$). Ela é transitivo porque com $e_1 \sqsubseteq e_2$ e $e_2 \sqsubseteq e_3$ temos os casos (a) $e_1 = \perp$, que implica $e_1 \sqsubseteq e_3$ ou (b) $e_1 = e_2$ que implica $e_2 = e_3$ e logo $e_1 = e_3$. Considerando a anti-simetria, suponha $e_1 \sqsubseteq e_2$ e $e_2 \sqsubseteq e_1$. O caso $e_1 = \perp$ implica $e_2 = \perp$ também; senão $e_1 = e_2$. Em ambos casos $e_1 = e_2$.
- $\sqsubseteq$ é completa. Suponha um cadeia $e_1 \sqsubseteq e_2 \sqsubseteq e_3 \cdots$: Existe ao máximo um n tal que $e_n \sqsubseteq e_{n+1}$ mas $e_n \neq e_{n+1}$. Logo, depois e_{n+1} a cadeia é constante e e_{n+1} é um limite superior. e_{n+1} é mínimo também, porque $e_{n+1} \sqsubseteq e'$ para todo limite superior e'.
- $C \cup \{\perp\}$ contém, per definição, um elemento mínino, $\perp$.

Exercício 2 (Funções contínuas)

(a) f é monotônica: Se $x_1 \sqsubseteq x_2$ temos (a) $x_1 = \perp$, logo $f(x_1) = \perp \sqsubseteq f(x_2)$ ou (b) $x_1 = x_2$ e também $f(x_1) = f(x_2) \sqsubseteq f(x_2)$. f é contínua: Da exercício 1(b) sabemos que qualquer cadeia ascendente contém o limite superior d_i. Logo $f(\bigsqcup_{n\geq 0} d_n) = f(d_i)$ e com a monotonia $\bigsqcup_{n\geq 0} f(d_n) = f(d_i)$ também.

(b) f é monotônica: Se $C_1 \subseteq C_2$, também temos $f(C_1) \subseteq f(c_2)$, analisando os casos que ambas são finitos ou infinitos, ou C_1 é finito e C_2 é infinito (o caso que C_1 é infinito e C_2 é finito não é possível). Mas f não é contínua. Suponha a cadeia

$$\{2\} \subseteq \{2,4\} \subseteq \{2,4,6\} \subseteq \cdots \{2n|n \in N, n \leq i\}$$

O limite superior mínimo dessa cadeia é $\{2n|n \in \}$ e $f(\{2n|n \in \}) = \{1,2,4,6,\ldots\}$ mas $f(\{2n|n \in N, n \leq i\}) = \{2n|n \in N, n \leq i\}$ é logo o limite superior mínimo da cadeia

$$f(\{2\}) \subseteq f(\{2,4\}) \subseteq f(\{2,4,6\}) \subseteq \cdots f(\{2n|n \in N, n \leq i\})$$

é $\{2n|n \in N\}$.

Exercício 3 (Extensões de IMP)

(a) $C[\![\mathbf{l_1} \mathbin{\mathtt{:=:}} \mathbf{l_2}]\!] = \lambda\sigma \in \Sigma_\perp.\sigma[\mathbf{l_1} \mapsto A[\![\mathbf{l_2}]\!]\sigma][\mathbf{l_2} \mapsto A[\![\mathbf{l_1}]\!]\sigma]$

(b) $C[\![\mathbf{l_1}\,\mathtt{,}\,\mathbf{l_2} \mathbin{\mathtt{:=}} \mathbf{a_1}\,\mathtt{,}\,\mathbf{a_2}]\!] = \lambda\sigma \in \Sigma_\perp.\sigma[\mathbf{l_1} \mapsto A[\![\mathbf{a_1}]\!]\sigma][\mathbf{l_2} \mapsto A[\![\mathbf{a_2}]\!]\sigma]$