

## Lista de soluções 5

### Exercício 1 (Corretude parcial: Cópia)

Escolhe a invariante  $a + y = x$ .

```

    {x ≥ 0}
    {x + 0 = x}
    a:=x;
    {a + 0 = x}
    y:=0;
    {a + y = x}
    while ¬(a=0) do
    {a + y = x ∧ a ≠ 0}
    {a + y = x}
    {a - 1 + y + 1 = x}
    y:= y+1;
    {a - 1 + y = x}
    a := a-1
    {a + y = x}
    )
    {a + y = x ∧ a = 0}
    {x = y}
    
```

### Exercício 2 (Corretude parcial: Logaritmo discreto)

Escolhe a invariante  $(l + \lfloor \log_2 r \rfloor = \lfloor \log_2 x \rfloor) \wedge (r > 0)$ .

```

    {x > 0}
    {⌊log2 x⌋ = ⌊log2 x⌋ ∧ x > 0}
    l:=0;
    {l + ⌊log2 x⌋ = ⌊log2 x⌋ ∧ x > 0}
    r:=x;
    {l + ⌊log2 r⌋ = ⌊log2 x⌋ ∧ r > 0}
    while ¬(r=1) do (
    {l + ⌊log2 r⌋ = ⌊log2 x⌋ ∧ r ≠ 1 ∧ r > 0}
    {l + ⌊log2 r⌋ = ⌊log2 x⌋ ∧ r > 1}
    {l + 1 + ⌊log2 ⌊r/2⌋⌋ = ⌊log2 x⌋ ∧ r > 1}
    r:=r÷2
    {l + 1 + ⌊log2 r⌋ = ⌊log2 x⌋ ∧ r > 0}
    l := l+1
    {l + ⌊log2 r⌋ = ⌊log2 x⌋ ∧ r > 0}
    )
    {(l + ⌊log2 r⌋ = ⌊log2 x⌋) ∧ r > 0 ∧ r = 1}
    {l = ⌊log2 x⌋}
    
```

### Exercício 3 (Corretude total: Cópia)

Vamos aumentar a prova da exercício 1 com a variante  $a$ :

```

    {x ≥ 0}
    {x + 0 = x ∧ 0 ≤ x}
    a:=x;
    {⊥ a + 0 = x ∧ 0 ≤ a}
    y:=0;
    {⊥ a + y = x ∧ 0 ≤ a}
    while ¬(a=0) do
    {⊥ a + y = x ∧ 0 ≤ a = a0 ∧ a ≠ 0}
    {⊥ a + y = x ∧ 0 ≤ a - 1 < a0}
    {⊥ a - 1 + y + 1 = x ∧ 0 ≤ a - 1 < a0}
    y:= y+1;
    {⊥ a - 1 + y = x ∧ 0 ≤ a - 1 < a0}
    a := a-1
    {⊥ a + y = x ∧ 0 ≤ a < a0}
    )
    {⊥ a + y = x ∧ a = 0}
    {⊥ x = y}
    
```

### Exercício 4 (Corretude total: Multiplicação)

Escolhe a invariante  $z = ax$  e a variante  $y - a$ .

```

    {0 ≤ y}
    {0 = 0x ∧ 0 ≤ y - 0}
    a := 0;
    {⊥ 0 = ax ∧ 0 ≤ y - a}
    z := 0;
    {⊥ z = ax ∧ 0 ≤ y - a}
    while ¬(a=y) do (
    {⊥ z = ax ∧ a ≠ y ∧ 0 ≤ y - a = v0}
    {⊥ z = ax ∧ 0 < y - a = v0}
    {⊥ z = ax ∧ 0 ≤ y - (a + 1) < v0}
    {⊥ (z + x) = (a + 1)x ∧ 0 ≤ y - (a + 1) < v0}
    z := z+x
    {⊥ z = (a + 1)x ∧ 0 ≤ y - (a + 1) < v0}
    a := a+1
    {⊥ z = ax ∧ 0 ≤ y - a < v0}
    )
    {⊥ z = ax ∧ a = y}
    {⊥ z = xy}
    
```