

Lista de exercícios 2

Exercício 1 (Indução)

Seja S algum alfabeto e S^* o conjunto das cadeias sobre esse alfabeto (por exemplo, com $S = \{x, y\}$, $S^* = \{\epsilon, x, y, xx, xy, yx, yy, xxx, \dots\}$, com a cadeia vazia ϵ .) Prove que não tem uma cadeia $s \in S^*$ e símbolos $a, b \in S$ tal que $as = sb$, se $a \neq b$ usando (a) indução natural (b) em comparação a indução bem-fundada.

Exercício 2 (Expressões determinísticas)

Vimos na aula o princípio da indução bem fundada e a indução estrutural para expressões aritméticas. Podemos aplicar a indução estrutural também para expressões booleanas, BExp, usando a relação $b \prec b'$, se b é uma subexpressão booleana imediata do b' . Com isso, o princípio da indução estrutural para expressões booleanas é

$$\begin{aligned} \forall b \in \text{BExp}. P(b) &\leftrightarrow \forall t \in \text{Bool}. P(t) \wedge \\ &\forall b \equiv a_1 = a_2 : P(b) \\ &\forall b \equiv a_1 < a_2 : P(b) \\ &\forall b \equiv b_1 \wedge b_2 : P(b_1) \wedge P(b_2) \rightarrow P(b) \wedge \\ &\forall b \equiv b_1 \vee b_2 : P(b_1) \wedge P(b_2) \rightarrow P(b) \wedge \\ &\forall b \equiv \neg b_1 : P(b_1) \rightarrow P(b) \end{aligned}$$

Usando indução estrutural, prove que a avaliação das expressões booleanas na semântica de IMP é determinístico: $P(\mathbf{b}) = \forall \sigma_0 \in \Sigma (\mathbf{b}, \sigma_0 \Downarrow \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}, \sigma_0 \Downarrow \mathbf{t}') \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}'$.

Exercício 3 (Expressões totais)

As expressões aritméticas e booleanas são *total*, no sentido que para cada estado σ e cada expressão a avaliação semântica sempre tem um resultado?

$$\begin{aligned} P(\mathbf{a}) &= \forall \mathbf{a} \in \text{AExp}, \sigma \in \Sigma : \exists n : \mathbf{a}, \sigma \Downarrow n \\ P(\mathbf{b}) &= \forall \mathbf{b} \in \text{BExp}, \sigma \in \Sigma : \exists t : \mathbf{b}, \sigma \Downarrow t \end{aligned}$$

Prove a totalidade das expressões aritméticas e booleanas usando indução estrutural. A semântica dos comandos também é total?

Exercício 4 (Semântica operacional estrutural de IMP)

Análise o seguinte programa usando a semântica operacional estrutural, começando num estado σ tal que $\sigma(x) = 3$.

```

y := 1
while ¬(x=0) do
  y := y × x;
  x := x - 1

```

Exercício 5 (Semântica operacional estrutural de IMP)

Usando o programa da exercício anterior, prove que para cada σ tal que $\sigma(x) \geq 0$

$$\mathbf{y}:=\mathbf{1}; \mathbf{w}, \sigma \rightarrow^* \sigma[x \mapsto 0][y \mapsto x!]$$

(**w** é uma abreviatura do laço **while** completo.) Dica: Prove a característica

$$P(n) = (\sigma(x) = n \wedge \sigma(y) = m \rightarrow \mathbf{w}, \sigma \rightarrow^* \sigma[x \mapsto 0][y \mapsto mn!])$$

usando indução natural (sobre o valor inicial do **x**).