INF05516 - Semântica formal N
Ciência da Computação - UFRGS
2006-2

Marcus Ritt
mrpritt@inf.ufrgs.br

30/10/2006

Introdução

Agenda

Última aula:

- Ordenações parcias e domínios.

Hoje:

- Teorema do ponto fixo. Aplicaçaõ para IMP.

Teorema do ponto fixo

Aula passada

- Um *domínio* é um conjunto com ordenação parcial completa e limite inferior $\perp_D$.
- Uma função é monotônica, se ela preserve a informação:

$$e_1 \sqsubseteq e_2 \rightarrow f(e_1) \sqsubseteq f(e_2)$$

- Uma função é contínua, se ela "aproxima" a solução ("depois do limite não acontecem novidades").

Teorema do ponto fixo

Se D é um domínio e $F \in [D \to D]$ uma função continua

$$f = \bigsqcup_{n \geq 0} F^n(\perp)$$

é o menor ponto fixo de F.

Prova:

(a) f existe: A monotonia garante que

$$\perp = F^0(\perp) \sqsubseteq F^1(\perp) \sqsubseteq F^2(\perp) \sqsubseteq \cdots$$

(inducão!) e com a completude obtemos que f existe.

Prova

(b) f é um ponto fixo:

$$\begin{aligned} F(f) &= F(\bigsqcup_{n \geq 0} F^n(\perp)) && \text{(por definição)} \\ &= \bigsqcup_{n \geq 0} F(F^n(\perp)) && \text{(F é contínua)} \\ &= \bigsqcup_{n \geq 1} F^n(\perp) = f && \text{(mesmo limite superior)} \end{aligned}$$

(c) f é o menor ponto fixo.
Para um ponto fixo f' temos $\perp \sqsubseteq f'$ e com a monotonia de F obtemos $\forall n \geq 0 : f^n(\perp) \sqsubseteq f'$.
Logo, f' é um limite superior e a completude garante que $f \sqsubseteq f'$.

O objetivo

Queremos justificar nossa equação

$$\mathcal{C}[\![\texttt{while b do c}]\!] = \operatorname{fix} F$$

com

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \operatorname{cond}(B[\![b]\!], \tau \circ C[\![c]\!], \mathrm{id}) \\ C[\![\texttt{while b do c}]\!] &\in [\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp] \\ F &\in [(\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp) \to (\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp)] \end{aligned}$$

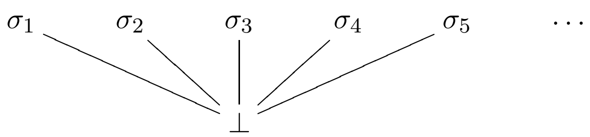
Objetivos:

1. Mostrar que $([\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp], \sqsubseteq)$ é um domínio.
2. Mostrar que F é contínua.

O domínio de estados

- $(\Sigma_\perp = \Sigma \cup \{\perp\}, \sqsubseteq_{\Sigma_\perp})$ com

$$\sqsubseteq_{\Sigma_\perp} = \{(\perp, \sigma) | \sigma \in \Sigma\} \cup \{(s, s) | s \in \Sigma_\perp\}$$

é um domínio elementar: 

O domínio de funções

- $([\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp], \sqsubseteq)$ com
$$f_1 \sqsubseteq f_2 \leftrightarrow \forall \sigma \in \Sigma_\perp : f_1(\sigma) \sqsubseteq_{\Sigma_\perp} f_2(\sigma)$$
  é um domínio.
- Existe um limite inferior (menor elemento) $\perp_{[\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp]}$?
- A ordenação $\sqsubseteq$ é uma ordenação parcial?
- Cada cadeia ascendente tem um limite superior mínimo?

Limite superior mínimo

- Considere uma cadeia ascendente infinita
$$f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \cdots$$
- Podemos definir um limite superior "pontual". Seja f a função tal que
$$f(\sigma) = \bigsqcup_{n \geq 0} f_i(\sigma).$$

Continuidade

- Para provar que alguma função F e contínua, é necessario de mostrar que ela é monotônica e

$$F\left(\bigsqcup_{n\geq 0} d_n\right) = \bigsqcup_{n\geq 0} F(d_n).$$

- Como $d_n \sqsubseteq \bigsqcup_{n\geq 0} d_n$ também $F(d_n) \sqsubseteq F\left(\bigsqcup_{n\geq 0} d_n\right)$ e então, $\bigsqcup_{n\geq 0} F(d_n) \sqsubseteq F\left(\bigsqcup_{n\geq 0} d_n\right)$.
- Logo, para provar a continuidade basta de provar

$$F\left(\bigsqcup_{n\geq 0} d_n\right) \sqsubseteq \bigsqcup_{n\geq 0} F(d_n).$$

Lemma 1

- Com $b \in [\Sigma_\perp \to \mathrm{Bool}]$ e $e \in [\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp]$

$$F(t) = \mathrm{cond}(b, t, e)$$

  é contínua (em t).

Lemma 2

- Com $c \in [\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp]$

$$F(f) = f \circ c$$

F é contínua (em f).

O teorema final

- Com os dois lemas acima, podemos provar finalmente que a semântica denotational de IMP, seguinda as equações semânticas é bem definido.

Teorema 1
A função $C[\![\cdot]\!] \in [\mathrm{Com} \to [\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp]$ é total.

Prova

Com indução estrutural sobre os comandos Com.

- Caso `skip`: A função correspondente é id.
- Caso $\mathtt{l:=a}$: A função correspondente é $\sigma \to \sigma[l \mapsto A[\![a]\!]\sigma]$.
- Caso $\mathbf{c_1};\mathbf{c_2}$: Temos funções $C[\![\mathbf{c_1}]\!]$ e $C[\![\mathbf{c_2}]\!]$ cujo composição $C[\![\mathbf{c_2}]\!] \circ C[\![\mathbf{c_1}]\!]$ também é bem definida.
- Caso `if` $\mathtt{b}$ `then` $\mathbf{c_1}$ `else` $\mathbf{c_2}$: Temos funções $C[\![\mathbf{c_1}]\!]$ e $C[\![\mathbf{c_2}]\!]$. cond é bem definida também e resulta em umas dessas funções.
- Caso `while` $\mathtt{b}$ `do` $\mathtt{c}$: Temos uma função $C[\![c]\!]$. Usando as lemas acima, temos que $F(f) = \mathrm{cond}(B[\![b]\!], f \circ C[\![c]\!], \mathrm{id})$ é contínua e logo $\mathrm{fix}\, F$ tem uma solução única e a semântica do `while` $\mathtt{b}$ `do` $\mathtt{c}$ é bem definida.

Exemplos

Exemplo

- Considere o exemplo `while x>0 do x:=x-1` da aula 20.

$$C[\![\texttt{while x>0 do x:=x-1}]\!] = \mathrm{fix}\, F$$

com

$$F(\tau) = \mathrm{cond}(B[\![x > 0]\!], \tau \circ C[\![\texttt{x:=x-1}]\!], \mathrm{id})$$

- Obtemos uma solução

$$\bigsqcup_{n \geq 0} F^n(\bot).$$

Exemplo...

$$
\begin{aligned}
F^0(\bot) &= \bot \\
F^1(\bot) &= F(\bot) \\
&= \lambda\sigma \in \Sigma_\bot . \begin{cases} \tau \circ C[\![\texttt{x:=x-1}]\!] & \text{se } \sigma(x) > 0 \\ \mathrm{id} & \text{senão} \end{cases} \\
F^2(\bot) &= F(F^1(\bot)) \\
&= \lambda\sigma \in \Sigma_\bot . \begin{cases} \sigma & \text{se } \sigma(x) \not> 0 \\ \sigma[x \mapsto 0] & \text{se } \sigma(x) = 1 \\ \bot & \text{se } \sigma(x) > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
F^n(\bot) = \cdots = \lambda\sigma \in \Sigma_\bot . \begin{cases} \sigma & \text{se } \sigma(x) \not> 0 \\ \sigma[x \mapsto 0] & \text{se } 1 \leq \sigma(x) < n \\ \bot & \text{se } \sigma(x) \geq n \end{cases}
$$

Exemplo...

$$
\begin{aligned}
\left(\bigsqcup_{n \geq 0} F^n(\bot) \right) \sigma &= \bigsqcup_{n \geq 0} F^n(\bot)\sigma \\
&= \begin{cases} \sigma & \text{se } \sigma(x) \not> 0 \\ \sigma[x \mapsto 0] & \text{se } 1 \leq \sigma(x) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Resumo

- Temos uma semântica denotational de IMP.
- A denotação não é de graça: Precisamos de achar $F^n(\perp)$ e $\bigsqcup F^n(\perp)$, que, em geral, precisa indução.
- O resultado é consistente: A semântica denotational do IMP é equivalente à semântica operacional.
- O método tem a vantagem de ser mais abstrata e tem varias aplicações (não só IMP).
- Também tem desvantagens: Por exemplo linguagens concorrentes ou paralelos são difícil de modelar.