INF05516 - Semântica formal N
Ciência da Computação - UFRGS
2006-2

Marcus Ritt
mrpritt@inf.ufrgs.br

23/10/2006

Introdução

Agenda

Última aula:

- Semântica denotational do laço while.

Hoje:

- Ordenações parcias e domínios.

Existência de soluções

Teorema do ponto fixo

Teorema do ponto fixo:
Se D é um domínio e $F \in [D \to D]$ uma função contínua

$$f = \bigsqcup_{n \geq 0} F^n(\bot)$$

é o menor ponto fixo de F.

- O teorema garante a *existência* uma solução.
- Usando o teorema obtemos uma solução única (mínima).

Ingredientes

Ingredientes não conhecidos dessa solução:

- Um *domínio*,
- uma função *contínua*
- e um "limite" $\bigsqcup$.

Conjuntos parcialmente ordenados

Conjuntos parcialmente ordenados

- Uma relação $\sqsubseteq$ reflexiva, transitiva e anti-simétrica (veja aula 2) se chama *ordem parcial*.
- Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto com uma ordem parcial $\sqsubseteq \subseteq D \times D$.
- Porque se chama ordenado?
- Porque se chama *parcialmente* ordenado?

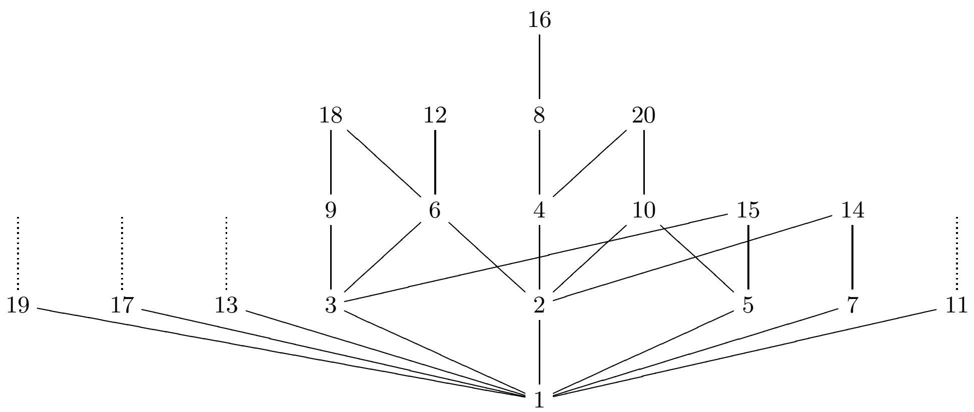
Diagramas de Hasse

- Um conjunto parcialmente ordenado pode ser visualizado num *diagrama de Hasse*.
- Um diagrama de Hasse é um grafo com nós D e arestas $\sqsubseteq$.
- A visualização em geral é simplificada:
  - Suponhamos uma direção dos arestas da baixo para cima.
  - Não mostramos nem as arestas transitivas nem as arestas reflexivas.

Helmut Hasse (*1898 +1978)

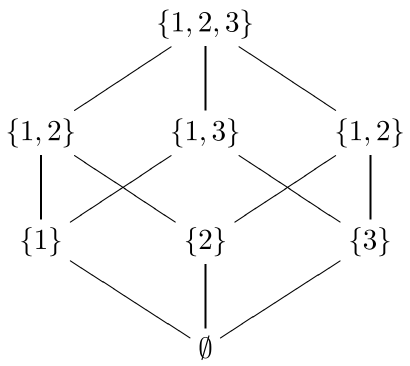
Exemplo

O que é a diagrama de Hasse para $\mathbb{N}, |$ (com $a|b$ se $\exists k : ka = b$)?



Exemplo

O que é a diagrama de Hasse de $\{1, 2, 3\}, \subseteq$?



Limites

- Seja $S \subseteq D$.
- Um elemento $m \in D$ é um *limite inferior* de S, sse $\forall c \in C : m \sqsubseteq c$.
- Um elemento $m \in D$ é um *limite superior* de S, sse $\forall c \in C : c \sqsubseteq m$.
- Para $\mathbb{N}, |$ qual são os limites inferiores de $\{4, 6, 10\}$?
- Se D mesmo tem um limite inferior (ou superior), esse limite é único. (Porque?)
- Se D tem um limite inferior, ele a denotado como $\perp_D$.
- $\mathbb{N}$ (com $|$) tem um limite inferior?

Exemplo

- Considere o conjunto $[\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp]$.
- Para dois elementos f, f' usamos a seguinte relação $\sqsubseteq$:

$$\sigma \sqsubseteq \sigma' \leftrightarrow \forall l f(l) = \perp \vee f(l) = f'(l)$$

- $([\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp], \sqsubseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.
- O conjunto tem o limite inferior $\perp_{[\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp]}$.

Ordenação parcial completa

- Um limite superior m de um conjunto $S \subseteq D$ é *mínimo*, se para todos os limites superiores m'

$$m \sqsubseteq m'$$

  (m se chama as vezes "supremo").
- Se um conjunto tem um limite superior mínimo, esse limite é único. (Porque?)
- Uma ordenação parcial é *completa*, se para cada cadeia ascendente

$$d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq d_3 \sqsubseteq \cdots$$

  existe um limite superior mínimo denotado

$$\bigsqcup_{n \geq 0} d_i.$$

Ordenação parcial completa

- Lembre-se da último exemplo da aula passada: Nosso objetivo é de definir o limite superior mínimo de uma cadeida ascendente de funções como a semântica de um laço!

Exemplos

Quais dos exemplos são ordenações parciais completas?

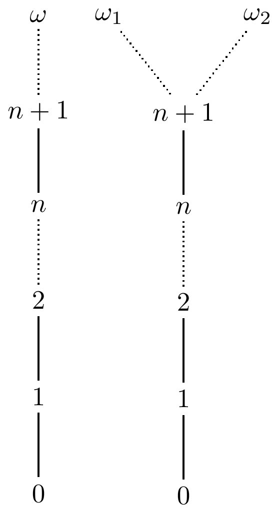
- $(\mathbb{N}, <)$?
- $(\mathbb{N}, |)$?
- $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$?
- $(\{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}, \subseteq)$?

Exemplos

- Podemos "fechar" $\mathbb{N}$ para construir uma ordenação parcial completo.
- Considere $(\mathbb{N} \cup \{\omega\}, \leq)$ com uma extensão de $\leq$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq \omega$.
- Nem toda ordenação parcial com limites superior existentes é completa:
- Considere $(\mathbb{N} \cup \{\omega_1, \omega_2\}, \sqsubseteq)$ tal que

$$e_1 \sqsubseteq e_2 = \begin{cases} & \text{se } e_1, e_2 \in \mathbb{N} \text{ e } e_1 \leq e_2 \\ \text{ou} & \text{se } e_1 \in \mathbb{N} \text{ e } e_2 \in \{\omega_1, \omega_2\} \\ \text{ou} & \text{se } e_1 = e_2 = \omega_1 \\ \text{ou} & \text{se } e_1 = e_2 = \omega_2 \end{cases}$$

- Neste caso a cadeia ascendente $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq \cdots$ tem limites superiores ω_1 e ω_2 mas não tem limite superior mínimo.



Domínios

- $(D, \sqsubseteq)$ é um *domínio* se
  1. $(D, \sqsubseteq)$ é um conjunto, com ordem parcial completa que contém
  2. um elemento mínimo $D_\perp$.
- A semântica denotational usa domínios para o significado das categorias sintáticas.

Construir domínios

Em geral, a construção de domínios precisa:

- A definição de um conjunto e uma relação.
- A verificação da ordenação parcial.
- A verificação da existência de um elemento $\perp$.
- A verificação da completude.

Operações de construção

- Varias *operações de construção* facilitem a construção de domínios para a modelagem de linguagens arbitrárias. Por exemplo, temos
  - Domínios elementares,
  - domínios "elevadas".
  - domínios de produto, soma (união disjunta) e lista e
  - domínios de funções.

Exemplo: Domínios elementares

- Com um conjunto D, podemos construir um *dóminio elementar* $(D_\perp, \sqsubseteq)$.
- Seja $D_\perp = D \cup \{\perp\}$ e

$$\sqsubseteq = \{(\perp, d) | d \in D\} \cup \{(d, d) | d \in D\}.$$

- Exemplo: Domínio booleano

$$\begin{tikzcd} \text{true} & & \text{false} \\ & \perp \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

Semântica para IMP

- Para o nosso objetivo de construir uma semântica para IMP precisamos o fato que

$$[\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp]$$

  é um domínio.
- Mas um domínio não basta para a existência de uma solução de equações recursivas.
- Intuitivamente precisamos ainda que a definição recursiva (o lado direito F da nossa equação)
  - preserve a informação e
  - é contínua no sentido que ela “aproxima” o resulta final.

Monocidade, continuidade

A formalização desses noções é o seguinte:

- Uma função $f : D \to E$ entre conjuntos ordenados parcias $(D, \sqsubseteq_D)$ e $(E, \sqsubseteq_E)$ é *monotônica* (preserve a ordem), se
$$\forall d, d' \in D : d \sqsubset_D d' \to f(d) \sqsubseteq_E f(d')$$
- Uma função $f : D \to$ entre conjuntos ordenados parciais completos é *contínua* se ela é monotônica e preserva limites superiores mínimos de cadeias $d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq d_3 \sqsubseteq \cdots$
$$f\left(\bigsqcup_{n\geq 0} d_n\right) = \bigsqcup_{n\geq 0} f(d_n).$$

Exemplo

- Quais funções $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ são monotônicas?

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 \\
2 \arrow[ur] & 2 \\
3 \arrow[r] & 3
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & 1 \\
2 \arrow[ur] & 2 \\
3 \arrow[r] & 3
\end{tikzcd}$$

Exemplo

- Nem toda função monotônica é contínua.
- Considere $(\mathbb{N} \cup \{w\}, \leq)$ (veja acima) novamente.
- A função

$$f(x) = \begin{cases} f(n) = 0 & \text{se } n \in \mathbb{N} \\ f(\omega) = \omega & \text{senão} \end{cases}$$

é monotônica (e estrita) mas não contínua:

$$f\left(\bigsqcup_{n \geq 0}\right) = f(\omega) \neq 0 = \bigsqcup_{n \geq 0} 0 = \bigsqcup_{n \geq 0} f(n)$$