INF05516 - Semântica formal N
Ciência da Computação - UFRGS
2006-2

Marcus Ritt
mrpritt@inf.ufrgs.br

18/10/2006

Agenda

Última aula:

- Semântica denotational do IMP.

Hoje:

- Semântica denotational do laço while.

Exemplo 1

Considere

```
while ¬(x=0) do (
   x:=x−2
)
```

(a) Usando a equação para while, escreve a equação deste comando.

Exemplo 1

(b) Verifique se as funções g_1 e g_2 definidas abaixo são soluções dessa equação:

$$g_1\sigma = \begin{cases} \sigma[x \mapsto 0] & \text{se } \sigma(x) \text{ é par e } \sigma(x) \geq 0 \\ \sigma' & \text{se } \sigma(x) \text{ é par e } \sigma(x) < 0 \\ \sigma'' & \text{se } \sigma(x) \text{ é ímpar} \end{cases}$$

onde σ e σ' podem ser estados quaisquer ou $\perp$.

$$g_2\sigma = \begin{cases} \sigma[x \mapsto 0] & \text{se } \sigma(x) \text{ é par e } \sigma(x) \geq 0 \\ \perp & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(c) Qual das duas funções, g_1 ou g_2 deve ser o significado do comando while acima?

Exemplo 2

Considere o comando

`while true do skip`.

(a) Escreva a equação associada ao comando e explique por que **todas** as funções em $\Sigma_\perp \to \Sigma_\perp$ são soluções para esta equação.

(b) Qual dessas funções é o significado deste comando?

Soluções mínimas

- Considere o seguinte ordem $\sqsubseteq$ nas funções:

$$f \sqsubseteq g \leftrightarrow \forall x f(x) = \perp \vee f(x) = g(x)$$

- Em essa ordem uma função com "menos informação" é menor.
- Ordena as soluções do primeiro exercício!

Observações

- Em todos exemplos acima, uma a solução adequada foi a solução mínima.

Compare!

- Os exemplos mostram que nossa equação tem várias soluções.
- Compare nossa equação

$$[\![\texttt{while b do c}]\!] = \mathrm{cond}([\![\mathrm{b}]\!], [\![\texttt{while b do c}]\!] \circ [\![\mathrm{c}]\!], \mathrm{id})$$

com as equações

$$x = 1 - x, x = \sqrt{x} \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = \sqrt{f(x)}, f(x) = f'(x) \qquad f \in [\mathbb{R} \to \mathbb{R}]$$

se f' é a derivada de f.

Ponto fixo para laços

- Uma abordagem de ver as equações é: cada solução é um *ponto fixo* da função do lado direto $F(x) = 1 - x$, $F(x) = \sqrt{x}$, $F(f) = \lambda x.\sqrt{f(x)}$, $F(f) = f'$:

$$F(x) = x.$$

- Sem considerar as perguntas sobre a existência e unicidade de uma solução, tentamos provisoriamente

$$\mathcal{C}[\![\texttt{while b do c}]\!] = \mathrm{fix}\, F$$
$$\text{com} \quad F(\tau) = \mathrm{cond}(B[\![b]\!], \tau \circ C[\![c]\!], \mathrm{id})$$

- A existência e unicidade depende das características do F.

Observações

- A separação tem avantagens técnicas: Perguntas sobre existência e unicidade se concentram em F.

Exemplo

Considere `while true do skip`.

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \text{cond}(B[\![\text{true}]\!], \tau \circ C[\![\texttt{skip}]\!], id) \\ &= \tau \circ C[\![\texttt{skip}]\!] = \tau \circ \mathrm{I} = \tau \end{aligned}$$

- Qualquer τ é um ponto fixo, confirmando os resultados acima.
- Qual seria o τ certo? Uma escolha natural é τ_0 tal que $\tau_0(\sigma)$ não é definido para qualquer σ:

$$C[\![\texttt{while true do skip}]\!] = \bot_{[\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot]}.$$

- Em palavras: independente do estado inicial o comando resulta em um estado não definido.

Obter soluções

- Como obter uma solução de uma equação?
- Lembre-se da semântica da definição indutiva de conjuntos. Começando com $\emptyset$ e aplicando as regras repetivamente, chegamos numa solução

$$R(R(\cdots R(\emptyset)\cdots)).$$

- Talvez, a abordagem funciona em esse caso também?

Observações

- Hätte man in Vorlesung 3 die Semantik der induktiven Definition noch so weit getrieben, daß man I_R als kleinste Menge motivieren kann, die man durch wiederholte Anwendung von R auf $\emptyset$ erhält, wäre die Motivation hier einfacher...

Exemplo 1

Considere `while x>0 do skip`.

$$
\begin{aligned}
F(\tau) &= \mathrm{cond}(B[\![x > 0]\!], \tau \circ C[\![\texttt{skip}]\!], \mathrm{id}) \\
&= \mathrm{cond}(B[\![x > 0]\!], \tau, \mathrm{id}) \\
&= \lambda.\sigma \in \Sigma.\text{se } \sigma(x) > 0 \text{ então } \tau\sigma \text{ senão } \sigma
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

- Calculamos:

$$
\begin{aligned}
F^0(\tau_0) &= \tau_0 =_{\mathrm{def}} \bot_{[\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot]} \\
F^1(\tau_0) &= F(\tau_0) = \lambda\sigma \in \Sigma.\text{se } \sigma(x) > 0 \text{ então } \bot \text{ senão } \sigma \\
F^2(\tau_0) &= F(F^1(\tau_0)) = \lambda\sigma \in \Sigma.\text{se } \sigma(x) > 0 \text{ então } \bot \text{ senão } \sigma
\end{aligned}
$$

- Obtemos um ponto fixo $F(F(\tau_0)) = F(\tau_0)$! Logo, uma solução é

$$
C[\![\texttt{while x>0 do skip}]\!] = \mathrm{fix}\, F \qquad = \lambda\sigma \in \Sigma.\text{se } \sigma(x) > 0 \text{ então } \bot \text{ senão } \sigma
$$

Exemplo 2

Considere `while x>0 do x:=x-1`.

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \mathrm{cond}(B[\![x > 0]\!], \tau \circ C[\![\texttt{x:=x-1}]\!], \mathrm{id}) \\ &= \mathrm{cond}(B[\![x > 0]\!], \tau \circ \lambda\sigma \in \Sigma.\sigma[x \mapsto \sigma(x) - 1], \mathrm{id}) \\ &= \lambda\sigma \in \Sigma.\text{se } \sigma(x) > 0 \text{ então } \tau\sigma[x \mapsto \sigma(x) - 1] \text{ senão } \sigma \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} F^0(\tau_0) &= \tau_0 =_{\mathrm{def}} \bot_{[\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot]} \\ F^1(\tau_0) &= F(\tau_0) \\ &= \lambda\sigma \in \Sigma.\text{se } \sigma(x) > 0 \text{ então } \tau_0\sigma[x \mapsto \sigma(x) - 1] \text{ senão } \sigma \\ &= \lambda.\sigma \in \Sigma.\text{se } \sigma(x) > 0 \text{ então } \bot_{[\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot]} \text{ senão } \sigma \\ F^2(\tau_0) &= F(F^1(\tau_0)) \\ &= \lambda\sigma \in \Sigma.\text{se } \sigma(x) > 0 \text{ então } F^1(\tau_0)\sigma[x \mapsto \sigma(x) - 1] \text{ senão } \sigma \\ &= \begin{cases} \lambda\sigma \in \Sigma.\sigma & \text{se } \sigma(x) \not> 0 \\ \lambda\sigma \in \Sigma.\sigma[x \mapsto 0] & \text{se } \sigma(x) = 1 \\ \bot_{[\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot]} & \text{se } \sigma(x) > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$F^3(\tau_0) = F(F^2(\tau_0)) = \cdots = \begin{cases} \lambda\sigma \in \Sigma.\sigma & \text{se } \sigma(x) \not> 0 \\ \lambda\sigma \in \Sigma.\sigma[x \mapsto 0] & \text{se } 1 \leq \sigma(x) \leq 2 \\ \bot_{[\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot]} & \text{se } \sigma(x) > 2 \end{cases}$$

Observações

⋯	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	⋯
⋯	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	⋯	
⋯	id	id	id	id	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	⋯	
⋯	id	id	id	id	$\sigma[x \mapsto 0]$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	⋯	
⋯	id	id	id	id	$\sigma[x \mapsto 0]$	$\sigma[x \mapsto 0]$	$\perp$	$\perp$	⋯	
⋯	id	id	id	id	$\sigma[x \mapsto 0]$	$\sigma[x \mapsto 0]$	$\sigma[x \mapsto 0]$	$\perp$	⋯	

Exemplo 2

- Em esse caso, não obtemos uma solução com um número finito de aplicações de F.
- Com cada aplicação de F a "informação" cresce:

$$F^0(\tau_0) \sqsubseteq F^1(\tau_0) \sqsubseteq F^2(\tau_0) \sqsubseteq F^3(\tau_0) \sqsubseteq \cdots \tag{1}$$

- Intuitivamente o "limite"

$$\tau = \begin{cases} \lambda\sigma \in \Sigma.\sigma & \text{se } \sigma(x) \not> 0 \\ \lambda\sigma \in \Sigma.\sigma[x \mapsto 0] & \text{se } \sigma(x) > 0 \end{cases}$$

representa a função adequada.