
INF05516 - Semântica formal N
Ciência da Computação - UFRGS
2006-2

Marcus Ritt
mrpritt@inf.ufrgs.br

04/10/2006

Introdução	2
Agenda	3
O condicional	4
Trabalhar com o condicional	5
Exemplo	6
Exemplo...	7
Exemplos	8
Condição	9
Exemplo...	10
Laços	11
Trabalhar com o laço	12
A invariante trivial	13
Exemplo: Fatorial	14
Exemplo...	15
Exemplo: Collatz.	16
Exemplo...	17
Exemplo: Parte do Collatz	18
Exemplo...	19
Exemplo: Multi.	20
Exemplo...	21

Agenda

Última aula:

- Introdução à semântica axiomática.

Hoje:

- Semântica axiomática: Condicional, laços. Exemplos.

v1912

Semântica formal N, aula 11 – 3 / 21

O condicional**Trabalhar com o condicional**

- Começando com a pós-condição, cada alternativa leva para uma pré-condição Φ_1, Φ_2 .
- Logo, se a pré-condição do condicional implica $b \rightarrow \Phi_1$ e $\neg b \rightarrow \Phi_2$ conseguimos uma prova (porque?)

```

      { $\Phi$ }
{ $b \rightarrow \Phi_1 \wedge \neg b \rightarrow \Phi_2$ }
  if b then (
    { $\Phi_1$ }
    ...
    { $\Psi$ }
  ) else (
    { $\Phi_2$ }
    ...
    { $\Psi$ }
  )
  { $\Psi$ }

```

v1912

Semântica formal N, aula 11 – 5 / 21

Exemplo

Entrada x

Pré-condição true

Saida y

Pós-condição $y = x + 1$.

```
a := x+1;
if (a-1=0) then
  y := 1
else
  y := a
```

v1912

Semântica formal N, aula 11 - 6 / 21

Exemplo...

Prova?

```
      {true}
      {x = 0 → x = 0 ∧ ¬(x = 0) → 0 = 0}
{x + 1 - 1 = 0 → 1 = x + 1 ∧ ¬(x + 1 - 1 = 0) → x + 1 = x + 1}
      a := x+1
      {a - 1 = 0 → 1 = x + 1 ∧ ¬(a - 1 = 0) → a = x + 1}
      if (a-1=0) then (
        {1 = x + 1}
        y := 1
        {y = x + 1}
      ) else (
        {a = x + 1}
        y := a
        {y = x + 1}
      )
      {y = x + 1}
```

v1912

Semântica formal N, aula 11 - 7 / 21

Condição**Entrada** x **Pré-condição** true**Saida** x, y **Pós-condição** ?

```

if ( $x > 0$ ) then (
   $y := 1$ 
) else (
   $x := 0 - x$ 
)

```

v1912

Semântica formal N, aula 11 - 9 / 21

Exemplo...

Prova?

$$\{x = n\}$$

$$\{(x > 0 \rightarrow x > 0) \wedge (x \leq 0 \rightarrow (x \leq 0 \wedge x = n))\}$$

```

if  $x > 0$  then (
   $\{x > 0\}$ 
   $\{x \geq 0 \wedge (n > 0 \rightarrow 1 = 1)\}$ 
   $y := 1$ 
   $\{x \geq 0 \wedge (n > 0 \rightarrow y = 1)\}$ 
) else (
   $\{x \leq 0 \wedge x = n\}$ 
   $\{x \leq 0 \wedge (n > 0 \rightarrow y = 1)\}$ 
   $\{0 - x \geq 0 \wedge (n > 0 \rightarrow y = 1)\}$ 
   $x := 0 - x$ 
   $\{x \geq 0 \wedge (n > 0 \rightarrow y = 1)\}$ 
)
 $\{x \geq 0 \wedge (n > 0 \rightarrow y = 1)\}$ 

```

v1912

Semântica formal N, aula 11 - 10 / 21

Trabalhar com o laço

$$\frac{\{\eta \wedge b\}c\{\eta\}}{\{\eta\}\mathbf{while\ }b\ \mathbf{do\ }c\{\eta \wedge \neg b\}} \text{ while}$$

- Φ é a *invariante* do laço.
- Para provar

$$\{\Phi\}\mathbf{while\ }b\ \mathbf{do\ }c\{\Psi\}$$

temos que achar uma invariante tal que

$$\vdash \Phi \rightarrow \eta \quad \{\eta\}\mathbf{while\ }b\ \mathbf{do\ }c\{\eta \wedge \neg b\} \quad \vdash \eta \wedge \neg b \rightarrow \Psi.$$

- Achar a invariante precisa criatividade e entendimento do laço (“entender um laço significa conhecer a invariante”).
- As vezes um *trace* da execução do programa ajuda.

v1912

Semântica formal N, aula 11 – 12 / 21

A invariante trivial

- O que acontece, se escolhermos $\eta = \text{true}$?
- true sempre é satisfeito!
- Obtemos a pós-condição trivial:

$$\frac{\{b\}c\{\text{true}\}}{\{\text{true}\}\mathbf{while\ }b\ \mathbf{do\ }c\{\neg b\}} \text{ while}$$

v1912

Semântica formal N, aula 11 – 13 / 21

Exemplo: Fatorial

Entrada x

Pré-condição $x \geq 0 \wedge x = n$

Saida y

Pós-condição $y = n!$

```
y := 1
while  $\neg(x=0)$  do
  y := y × x;
  x := x - 1
```

v1912

Semântica formal N, aula 11 - 14 / 21

Exemplo...

Finalmente, vamos provar nosso exemplo do início!

```
{x = n ∧ x ≥ 0}
{x! = n! ∧ x ≥ 0}
  y := 1;
  {yx! = n! ∧ x ≥ 0}
  while  $\neg(x=0)$  do (
    {yx! = n! ∧ x > 0}
    y := y*x;
    {y(x-1)! = n! ∧ x > 0}
    x := x-1
    {yx! = n! ∧ x ≥ 0}
  )
  {yx! = n! ∧ x ≥ 0 ∧ x = 0}
  {y = n!}
```

v1912

Semântica formal N, aula 11 - 15 / 21

Exemplo: Collatz

Entrada x

Pré-condição $x \geq 0$

Saida x

Pós-condição $x = 1$

```
C ≡
while ¬(x=1) do (
  y:=2; z:=1;
  while y < x do ( y:=y+2; z:=z+1 );
  if (y = x) then (
    x := z
  ) else (
    x := 3*x+1
  )
)
```

v1912

Semântica formal N, aula 11 – 16 / 21

Exemplo...

Um caso para a invariante trivial!

```
{true}
while ¬(x=1) do (
  ...
)
{x = 1}
```

v1912

Semântica formal N, aula 11 – 17 / 21

Exemplo: Parte do Collatz

Divisão inteira por dois:

Entrada x

Pré-condição $x > 0$

Saida y, z

Pós-condição ?

```
y:=2;
z:=1;
while y < x do (
  y:=y+2; z:=z+1
)
```

Trace:

x	y	z
11	-	-
11	2	1
11	4	2
11	6	3
11	8	4
11	10	5
11	12	6

v1912

Semântica formal N, aula 11 - 18 / 21

Exemplo...

Invariante: $y = 2z \wedge y < x + 2$.

```
{x > 0}
{2 = 2 ∧ 2 < x + 2}
  y:=2;
  {y = 2 ∧ y < x + 2}
  z:=1;
  {y = 2z ∧ y < x + 2}
  while y < x do (
    {y = 2z ∧ y < x}
    {y + 2 = 2(z + 1) ∧ y + 2 < x + 2}
    y:=y+2;
    {y = 2(z + 1) ∧ y < x + 2}
    z:=z+1
    {y = 2z ∧ y < x + 2}
  )
  {y = 2z ∧ x ≤ y ∧ y < x + 2}
  {y = 2z ∧ (y = x ∨ y = x + 1)}
  {z = ⌊x/2⌋}
```

v1912

Semântica formal N, aula 11 - 19 / 21

Exemplo: Multi

Entrada x, y

Pré-condição $y \geq 0$

Saida z

Pós-condição $z = xy$

```
a := 0;
z := 0;
while  $\neg(a=y)$  do (
  z := z + x;
  a := a + 1
)
```

v1912

Semântica formal N, aula 11 – 20 / 21

Exemplo...

Invariante: $z = ax$.

```
{ $y \geq 0$ }
{ $0 = 0$ }
a:=0;
{ $0 = ax$ }
z:=0;
{ $z = ax$ }
while  $\neg(a=y)$  do
{ $z = ax \wedge a \neq y$ }
{ $z = ax$ }
{ $z + x = (a + 1)x$ }
z:=z+x
{ $z = (a + 1)x$ }
a := a+1
{ $z = ax$ }
{ $a = y \wedge z = ax$ }
{ $z = xy$ }
```

v1912

Semântica formal N, aula 11 – 21 / 21