
INF05516 - Semântica formal N
Ciência da Computação - UFRGS
2006-2

Marcus Ritt
mrpritt@inf.ufrgs.br

23/08/2006

Introdução	2
Agenda	3
Semântica operacional estrutural	4
Passos pequenos: a idéia	5
Comparação	6
Discussão	7
Sistemas de transição	8
Sistemas de transição (2)	9
SOE	10
SOE dos comandos	11
Exemplo	12
Exemplo...	13
Transições e provas na SOE	14
SOE dos comandos (2)	15
Exemplo	16
Equivalência e determinismo	17
Discussão: variações	18
Equivalência	19
Estudo de caso: Paralelismo	20
Paralelismo	21
Paralelismo: SOE	22
Exemplo de uma derivação	23
Exemplo de uma derivação...	24
Paralelismo: SON	25
Resumo: Paralelismo	26

Agenda

Última aula:

- Aplicações da semântica: Características de IMP.

Hoje:

- Semântica operacional estrutural.
- Características da semântica operacional estrutural.
- Estudo de caso: Paralelismo.

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 3 / 26

Semântica operacional estrutural

Passos pequenos: a idéia

Definimos por exemplo

$$\frac{a_1, \sigma \Downarrow n_1 \quad a_2, \sigma \Downarrow n_2}{a_1 + a_2, \sigma \Downarrow n.} \text{ sum, com } n = n_1 + n_2$$

Considere a seguinte variação

$$\frac{\frac{a_1, \sigma \rightarrow a'_1, \sigma'}{a_1 + a_2, \sigma \rightarrow a'_1 + a_2, \sigma'} \quad \frac{a, \sigma \rightarrow a', \sigma'}{n + a, \sigma \rightarrow n + a', \sigma'}}{n_1 + n_2, \sigma \rightarrow n, \sigma} \text{ com } n = n_1 + n_2$$

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 5 / 26

Comparação

Observe a diferenças:

- Primeira versão: Reduz uma expressão diretamente para o resultado
Porém se chama SO de passos grandes (big-step) ou SO natural.
- Segunda versão: Reduz uma expressão passo a passo
 - ◆ Por isso ela resulta em uma expressão parcialmente reduzida junto com um estado até chegar no resultado.
 - ◆ Se chama SO de passos pequenos (small-step) ou SO estrutural.



Gordon Plotkin



Gilles Kahn

Semântica formal N, aula 5 – 6 / 26

v1941

Discussão

- SON em geral tem menos regras; assim é mais compreensível.
- SON é mais parecido com uma prova do resultado.
- SOE modela os passos intermediários e assim se aplica bem para a semântica de linguagens concorrentes ou paralelos.
- SOE é um *sistema de transição* que precisa varios passos até chegar no resultado.
- Os dois são *dirigida a sintaxe*: a semântica de uma expressão ou um comando é baseado na semântica das suas componentes.

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 7 / 26

Sistemas de transição

Um sistema de transição consiste em

- um conjunto de estados Γ e
- uma relação de transição $\rightarrow \subseteq \Gamma \times \Gamma$.

Na semântica operacional estrutural as regras definem \rightarrow . Escrevemos

- $\gamma_0 \rightarrow^k \gamma_k$ se temos $\gamma_i, 0 \leq i < k$ tal que $\gamma_i \rightarrow \gamma_{i+1}$.
(Lê: Existe uma derivação com k passos de γ_0 para γ_k .)
- \rightarrow^* para o fecho reflexivo e transitivo de \rightarrow .
(Lê $\gamma_0 \rightarrow^* \gamma_1$: Existe uma derivação de γ_0 para γ_1 .)

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 8 / 26

Sistemas de transição (2)

Uma configuração γ é *sem sucessor*, se

$$\forall \gamma' \in \Gamma : \gamma \not\rightarrow \gamma'$$

Usamos também um conjunto de estados finais $F \subset \Gamma$ (que são sem sucessor). Assim temos dois tipos de estados γ sem sucessor

- $\gamma \in F$: γ é um estado final (resultado de uma computação)
- $\gamma \notin F$: γ é *parada* ("stuck"): temos nem resultado nem um passo seguinte.

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 9 / 26

SOE

É possível de dar uma semântica operacional estrutural para a linguagem inteira:

- as expressões aritméticas
- as expressões booleanas
- os comandos
- Para nós os comandos são mais interessantes: Ficamos com as mesmas regras para expressões aritméticas e booleanas.
- Em geral, na SOE podemos escolher a granularidade dos passos.

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 10 / 26

SOE dos comandos de IMP

Usamos estados $\Gamma = \text{Com} \times \Sigma$ com estados finais $F = \{\text{skip}\} \times \Sigma$.

$$\frac{a, \sigma \Downarrow n}{x := a, \sigma \rightarrow \text{skip}, \sigma[x \mapsto n]} \text{ assign}$$
$$\frac{c_1, \sigma \rightarrow c'_1, \sigma'}{c_1; c_2, \sigma \rightarrow c'_1; c_2, \sigma'} \text{ seq1}$$
$$\frac{}{\text{skip}; c_2, \sigma \rightarrow c_2, \sigma'} \text{ seq2}$$

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 11 / 26

Exemplo

Com σ tal que $\sigma(i) = 3$ o que significa $i := i+1; (\text{skip}; i := i*2)$?

$$\begin{aligned} i := i+1; (\text{skip}; i := i*2), \sigma &\rightarrow_{\text{assign}} \text{skip}; (\text{skip}; i := i*2), \sigma[i \mapsto 4] \\ &\rightarrow_{\text{seq2}} \text{skip}; i := i*2, \sigma[i \mapsto 4] \\ &\rightarrow_{\text{seq2}} i := i*2, \sigma[i \mapsto 4] \\ &\rightarrow_{\text{assign}} \text{skip}, \sigma[i \mapsto 8] \end{aligned}$$

v1941

Semântica formal N, aula 5 - 12 / 26

Exemplo...

Observa: Temos que provar cada passo usando as regras, por exemplo

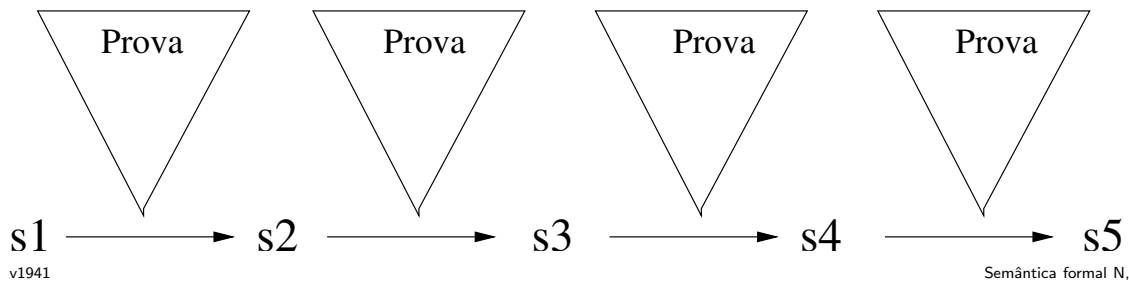
$$\frac{\frac{i+1, \sigma \rightarrow 4}{i := i+1, \sigma \rightarrow \text{skip}, \sigma[i \mapsto 4]} \text{assign}}{i := i+1; (\text{skip}; i := i*2), \sigma \rightarrow \text{skip}; (\text{skip}; i := i*2), \sigma[i \mapsto 4]} \text{seq1}$$

v1941

Semântica formal N, aula 5 - 13 / 26

Transições e provas na SOE

Em geral, temos varios passos. Cada passo é provado correto.



SOE dos comandos de IMP (2)

$$\frac{b, \sigma \Downarrow \text{true}}{\text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rightarrow c_1, \sigma} \text{if-true}$$
$$\frac{b, \sigma \Downarrow \text{false}}{\text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rightarrow c_2, \sigma} \text{if-false}$$
$$\frac{}{\text{while } b \text{ do } c, \sigma \rightarrow \text{if } b \text{ then } (c; \text{while } b \text{ do } c) \text{ else skip}, \sigma} \text{while}$$

v1941

Semântica formal N, aula 5 - 15 / 26

Exemplo

Seja $w \equiv \text{while } x < 6 \text{ do } x := x + 1$ e σ tal que $\sigma(x) = 4$.

```
w, σ  →while  if x < 6 then (x := x + 1; w) else skip, σ
        →if-true x := x + 1; w, σ
        →seq1,seq2 w, σ[x ↦ 5]
        →while  if x < 6 then (x := x + 1; w) else skip, σ[x ↦ 5]
        →if-true x := x + 1; w, σ[x ↦ 5]
        →seq1,seq2 w, σ[x ↦ 6]
        →while  if x < 6 then (x := x + 1; w) else skip, σ[x ↦ 6]
        →if-false skip, σ[x ↦ 6]
```

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 16 / 26

Equivalência e determinismo

Em analogia com a semântica operacional natural, temos as noções

- da *equivalência* $c_1 \sim c_2$ se temos para todos $\sigma \in \Sigma$
 - ◆ $c_1, \sigma \rightarrow^* \gamma$ sse $c_2, \sigma \rightarrow^* \gamma$ para γ final ou parada,
 - ◆ c_1, σ tem uma derivação infinita sse c_2, σ tem uma derivação infinita;
- e do *determinismo*, se para todos

$$\forall \sigma_0 \in \Sigma. c, \sigma_0 \rightarrow \gamma \wedge c, \sigma_0 \rightarrow \gamma' \rightarrow \gamma = \gamma'.$$

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 17 / 26

Discussão: variações

Compare nossas regras com as seguintes variações (suponhando passos pequenos para expressões booleanas):

$$\frac{\frac{\frac{b, \sigma \rightarrow b', \sigma}{\text{if } b \text{ then } c \text{ else } c', \sigma \rightarrow \text{if } b' \text{ then } c \text{ else } c', \sigma} \text{if-true}}{\text{if false then } c \text{ else } c', \sigma \rightarrow c', \sigma} \text{if-false}}{\text{if } b \text{ then } c \text{ else } c', \sigma \rightarrow \text{if } b' \text{ then } c \text{ else } c', \sigma} \text{if}$$

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 18 / 26

Equivalência

É possível de provar que a SON e SOE do IMP são equivalentes (indução!):

$$c, \sigma \Downarrow \sigma' \quad \text{se e somente se} \quad c, \sigma \rightarrow \text{skip}, \sigma'$$

- Uma prova na semântica operacional natural resulta no estado σ sse a execução na semântica operacional estrutural para com o mesmo estado.
- Uma execução na semântica operacional natural não tem prova sse a execução na semântica operacional estrutural não para.

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 19 / 26

Paralelismo

- Vamos aumentar IMP com o construto $c \text{ par } c'$
- Informalmente, **par** significa a execução paralela (ou concorrente que não importa nesse contexto) de c e c'

$x:=1 \text{ par } y:=2;$
 $x:=x+1 \text{ par } y:=y+x$

- Como seriam as regras certas na semântica operacional?

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 21 / 26

Paralelismo: SOE

$$\frac{c_1, \sigma \rightarrow c'_1, \sigma'}{c_1 \text{ par } c_2, \sigma \rightarrow c'_1 \text{ par } c_2, \sigma'} \text{par}_{l1}$$

$$\frac{}{\text{skip par } c_2, \sigma \rightarrow c_2, \sigma'} \text{par}_{l2}$$

$$\frac{c_2, \sigma \rightarrow c'_2, \sigma'}{c_1 \text{ par } c_2, \sigma \rightarrow c_1 \text{ par } c'_2, \sigma'} \text{par}_{r1}$$

$$\frac{}{c_1 \text{ par skip}, \sigma \rightarrow c_1, \sigma'} \text{par}_{r2}$$

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 22 / 26

Exemplo de uma derivação

Seja σ tal que $\sigma(x) = 1$ e $\sigma(y) = 2$. Temos

$$\begin{array}{l} \text{x:=x+1 par y:=y+x, } \sigma \\ \rightarrow_{\text{assign, par}_{11}} \text{ skip par y:=y+x, } \sigma[x \mapsto 2] \\ \quad \rightarrow_{\text{par}_{12}} \text{ y:=y+x, } \sigma[x \mapsto 2] \\ \quad \rightarrow_{\text{assign}} \text{ skip, } \sigma[x \mapsto 2][y \mapsto 4] \end{array}$$

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 23 / 26

Exemplo de uma derivação...

Mas temos também

$$\begin{array}{l} \text{x:=x+1 par y:=y+x, } \sigma \\ \rightarrow_{\text{assign, par}_{r1}} \text{ x:=x+1 par skip, } \sigma[y \mapsto 3] \\ \quad \rightarrow_{\text{par}_{r2}} \text{ x:=x+1, } \sigma[y \mapsto 3] \\ \quad \rightarrow_{\text{assign}} \text{ skip, } \sigma[x \mapsto 2][y \mapsto 3] \end{array}$$

Portanto, IMP com essa semântica não é mais determinístico!

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 24 / 26

Paralelismo: SON

Como seriam as regras certas na semântica operacional natural?

$$\frac{c_1, \sigma_0 \Downarrow \sigma_1 \quad c_2, \sigma_1 \Downarrow \sigma_2}{c_1 \text{ par } c_2, \sigma_0 \Downarrow \sigma_2} \text{par1}$$
$$\frac{c_1, \sigma_1 \Downarrow \sigma_2 \quad c_2, \sigma_0 \Downarrow \sigma_1}{c_1 \text{ par } c_2, \sigma_0 \Downarrow \sigma_2} \text{par2}$$

Certo?

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 25 / 26

Resumo: Paralelismo

- Na semântica operacional estrutural a expressão do paralelismo é fácil
- Na semântica operacional natural os componentes de um comando são atômicos: por isso uma execução paralelo de sub-comandos (intercalação) não é possível.

v1941

Semântica formal N, aula 5 – 26 / 26