
INF05516 - Semântica formal N
Ciência da Computação - UFRGS
2006-2

Marcus Ritt
mrpritt@inf.ufrgs.br

21/08/2006

Introdução	2
Agenda	3
Valor das provas	4
Equivalências	5
Exemplo: While	6
Exemplo: While	7
Exemplo: While	8
Equivalências: Mais exemplos	9
Indução sobre derivações	10
Indução sobre o árvore de derivação	11
Determinismo	12
Expressões aritméticas	13
Expressões aritméticas...	14
Expressões booleanas	15
Comandos	16
Comandos	17
Comandos	18
Mais características gerais	19

Agenda

Última aula:

- A base de raciocínio formal: Provas
- Aplicações da semântica: Características de IMP e de programas.

Hoje:

- Aplicações da semântica: Mais sobre características.

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 3 / 19

Valor das provas

- Uma prova as vezes permite um entendimento mais profundo de uma característica.
- Uma prova é ajuda
 - ◆ Frequentemente a intuição esta errada.
 - ◆ Frequentemente as características não são obvias.

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 4 / 19

Exemplo: While

Seja $w \equiv \text{while } b \text{ do } c$.

$$w \sim \text{if } b \text{ then } (c; w) \text{ else skip?}$$

Suponha $w, \sigma \Downarrow \sigma'$. Qual seria a última regra aplicada? Temos duas possibilidades:

1. b tem um valor verdadeiro:

$$\frac{b, \sigma \Downarrow \text{true} \quad c; w, \sigma \Downarrow \sigma'}{w, \sigma \Downarrow \sigma'} \text{ while}$$

Usando isso, podemos concluir

$$\frac{b, \sigma \Downarrow \text{true} \quad c; w, \sigma \Downarrow \sigma'}{\text{if } b \text{ then } (c; w) \text{ else skip}, \sigma \Downarrow \sigma'} \text{ if}$$

Exemplo: While ...

2. b tem um valor falso:

$$\frac{b, \sigma \Downarrow \text{false}}{w, \sigma \Downarrow \sigma} \text{ while}$$

Usando isso, podemos concluir

$$\frac{b, \sigma \Downarrow \text{false} \quad \frac{}{\text{skip}, \sigma \Downarrow \sigma} \text{ skip}}{\text{if } b \text{ then } (c; w) \text{ else skip}, \sigma \Downarrow \sigma} \text{ if}$$

Ao contrário, suponha que $\text{if } b \text{ then } (c; w) \text{ else skip}, \sigma \Downarrow \sigma'$. De novo, temos duas possibilidades:

1. b tem um valor verdadeiro:

$$\frac{b, \sigma \Downarrow \text{true} \quad c; w, \sigma \Downarrow \sigma'}{\text{if } b \text{ then } (c; w) \text{ else skip}, \sigma \Downarrow \sigma'} \text{ if}$$

Exemplo: While ...

Usando isso, podemos concluir

$$\frac{\mathbf{b}, \sigma \Downarrow \text{true} \quad \mathbf{c}; \mathbf{w}, \sigma \Downarrow \sigma'}{\mathbf{w}, \sigma \Downarrow \sigma'} \text{ while}$$

2. **b** tem um valor falso:

$$\frac{\mathbf{b}, \sigma \Downarrow \text{false} \quad \text{skip}, \sigma \Downarrow \sigma}{\text{if } \mathbf{b} \text{ then } (\mathbf{c}; \mathbf{w}) \text{ else skip}, \sigma \Downarrow \sigma} \text{ if}$$

Usando isso, podemos concluir

$$\frac{\mathbf{b}, \sigma \Downarrow \text{false}}{\mathbf{w}, \sigma \Downarrow \sigma} \text{ while}$$

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 8 / 19

Equivalências: Mais exemplos

- $\text{skip}; \mathbf{c} \sim \mathbf{c}$?
- $\mathbf{x} := \mathbf{a}_1; \mathbf{x} := \mathbf{a}_2 \sim \mathbf{x} := \mathbf{a}_2$?
- $\mathbf{a}_1 \sim \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{x} := \mathbf{a}_1 \sim \text{meta } \mathbf{x} := \mathbf{a}_2$?
- $\mathbf{c}_1 \sim \mathbf{c}_2 \rightarrow \text{if } \mathbf{b} \text{ then } \mathbf{c}_1 \text{ else } \mathbf{c}_2 \sim \mathbf{c}_1$?
- Para que serve? Pense em transformação, otimização, instrumentação, ...
- Tudo bem, mas: como provar que duas expressões *não* são equivalentes?
- Tem uma solução geral? Não: Equivalência em geral não é decidível! (Porque?)

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 9 / 19

Indução sobre o árvore de derivação

- O raciocínio do exemplo anterior foi em termos de árvores de derivação.
 - Tem casos, em que a indução estrutural não se aplica: usamos um raciocínio alternativo sobre as árvores de derivação.
 - O princípio da indução bem fundada, também permite uma indução sobre a estrutura da árvore de derivação.
1. Prove que uma característica é válido para as axiomas
 2. Prove que uma característica é válido para derivações compostas: Suponha que a característica é válido para as premissas (sub-derivações), e prove que ela é válida para a conclusão.

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 11 / 19

Determinismo: Expressões aritméticas

Usando indução estrutural, podemos provar que a avaliação das expressões aritméticas é determinística:

$$P(a) = \forall \sigma \in \Sigma (a, \sigma \Downarrow n_1 \wedge a, \sigma \Downarrow n_2) \rightarrow n_1 = n_2$$

Prova:

a ≡ **n** Só tem uma regra **n**, $\sigma \Downarrow n$. Logo, $n_1 = n_2 = n$.

a ≡ **l** Só tem uma regra **l**, $\sigma \Downarrow \sigma(l)$. Logo, $n_1 = n_2 = \sigma(l)$.

a ≡ **a'+a''** Temos

$$\frac{a', \sigma \Downarrow n'_1 \quad a'', \sigma \Downarrow n''_1}{a, \sigma \Downarrow n_1} \text{sum, com } n_1 = n'_1 + n''_1$$

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 13 / 19

Determinismo: Expressões aritméticas...

$$\frac{\mathbf{a}', \sigma \Downarrow n'_2 \quad \mathbf{a}'', \sigma \Downarrow n''_2}{\mathbf{a}, \sigma \Downarrow n_2} \text{sum, com } n_2 = n'_2 + n''_2$$

A hipótese de indução mostra que $n'_1 = n'_2$ e $n''_1 = n''_2$ é logo $n_1 = n_2$.

Os casos $-$ e \times são semelhantes.

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 14 / 19

Determinismo: Expressões booleanas

Da mesma maneira, podemos provar, que a avaliação das expressões booleanas é determinístico:

$$P(\mathbf{b}) = \forall \sigma \in \Sigma (\mathbf{b}, \sigma \Downarrow \mathbf{t} \wedge \mathbf{b}, \sigma \Downarrow \mathbf{t}' \rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{t}')$$

(Exercício!)

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 15 / 19

Determinismo: Comandos

$$\forall \sigma_0 \in \Sigma (\mathbf{c}, \sigma_0 \Downarrow \sigma \wedge \mathbf{c}, \sigma_0 \Downarrow \sigma') \rightarrow \sigma = \sigma'$$

A abordagem com a indução estrutural não adianta para provar o determinismo de comandos (por que?).

Prova com indução sobre o árvore de derivação de $\mathbf{c}, \sigma_0 \Downarrow \sigma$:

$\mathbf{c} \equiv \text{skip}$ Só tem uma regra sem premissas, logo $\sigma_0 = \sigma = \sigma'$.

$\mathbf{c} \equiv \mathbf{x} := \mathbf{a}$ Ambas derivações tem a forma

$$\frac{\mathbf{a}, \sigma_0 \Downarrow n}{\mathbf{x} := \mathbf{a}, \sigma_0 \Downarrow \sigma_0[x \mapsto n]} \text{loc}$$

com $\sigma = \sigma_0[x \mapsto n]$ e $\sigma' = \sigma_0[x \mapsto n']$. Mas a avaliação das expressões aritméticas é determinística, portanto $n = n'$ e $\sigma = \sigma'$.

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 16 / 19

Determinismo: Comandos...

$\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}_1 ; \mathbf{c}_2$ Ambas derivações tem a forma

$$\frac{\mathbf{c}_1, \sigma_0 \Downarrow \sigma_1 \quad \mathbf{c}_2, \sigma_1 \Downarrow \sigma}{\mathbf{c}_1 ; \mathbf{c}_2, \sigma_0 \Downarrow \sigma} \text{seq}$$

Mas a hipótese implica que $\sigma_1 = \sigma'_1$ e logo, $\sigma = \sigma'$.

$\mathbf{c} \equiv \text{if } \mathbf{b} \text{ then } \mathbf{c}_1 \text{ else } \mathbf{c}_2$ O determinismo das expressões booleanas implica que $\mathbf{b}, \sigma \Downarrow \text{true}$ ou $\mathbf{b}, \sigma \Downarrow \text{false}$ (mas não ambas). Seja $\mathbf{b}, \sigma \Downarrow \text{true}$. Os derivações tem a forma

$$\frac{\mathbf{b}, \sigma_0 \Downarrow \text{true} \quad \mathbf{c}_1, \sigma_0 \Downarrow \sigma}{\text{if } \mathbf{b} \text{ then } \mathbf{c}_1 \text{ else } \mathbf{c}_2, \sigma_0 \Downarrow \sigma} \text{if}$$

Logo, o hipótese de indução implica que $\sigma = \sigma'$.

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 17 / 19

Determinismo: Comandos...

$c \equiv \text{while } b \text{ do } c$ Parecido com o caso de if, a condição avalia por false ou true. No primeiro caso, a regras tem a forma

$$\frac{b, \sigma_0 \Downarrow \text{false}}{\text{while } b \text{ do } c, \sigma_0 \Downarrow \sigma_0} \text{ while}$$

e $\sigma = \sigma' = \sigma_0$. No segundo caso, as regras tem a forma

$$\frac{b, \sigma_0 \Downarrow \text{false} \quad c; \text{while } b \text{ do } c, \sigma_0 \Downarrow \sigma}{\text{while } b \text{ do } c, \sigma_0 \Downarrow \sigma} \text{ while}$$

De novo, a hipótese implica que $\sigma = \sigma'$ para as sub-derivações, e assim, para **while**.

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 18 / 19

Mais características gerais

- Totalidade: Cada expressão ou comando sempre tem um resultado? Veja os exercícios.
- Infelizmente tem características não decidíveis...

v1940

Semântica formal N, aula 4 – 19 / 19