

Soluções prova 2

Questão 0.1 (Formulação, 2pt)

Sejam $N(x)$: x sabe negar afirmações, $E(x)$: x é estudante, $C(x, y)$: x conhece y .
 Define o predicado composto $O(x) := \exists y E(y) \wedge C(x, y)$: x conhece um outro estudante.

- (a) $\neg \forall x E(x) \rightarrow N(x)$
- (b) $\forall x \forall y \neg(x = y) \wedge E(x) \wedge E(y) \rightarrow N(x) \vee N(y)$
- (c) $\forall x \forall y \forall z \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge E(x) \wedge E(y) \wedge E(z) \rightarrow (N(x) \wedge N(y)) \vee (N(x) \wedge N(z)) \vee (N(y) \wedge N(z))$
- (d) $\forall x E(x) \wedge \neg N(x) \rightarrow \exists y E(y) \wedge N(y) \wedge C(x, y)$
- (e) $\neg(\forall x E(x) \wedge N(x) \rightarrow \exists y E(y) \wedge \neg N(y) \wedge C(x, y))$
- (f) $\neg(\exists x E(x) \wedge \neg O(x) \wedge N(x)) \wedge (\exists x E(x) \wedge \neg N(x) \wedge \neg O(x))$

Questão 0.2 (Modelos, 2pt)

Denota com M uma estrutura e com a uma atribuição.

$$\begin{aligned} \varphi \text{ satisfatível} &\iff \exists M, a M \models_a \varphi && \text{definição de "satisfatível"} \\ &\iff \exists M, a M \not\models_a \neg\varphi && \text{definição de } \models \\ &\iff \text{Não } \forall M, a M \models_a \varphi && \\ &\iff \varphi \text{ não é tautologia} && \text{definição da tautologia.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \models \varphi_2 &\iff \forall M, a M \models_a \varphi_1 \Rightarrow M \models_a \varphi_2 && \text{definição de } \vdash \\ &\iff \forall M, a M \not\models_a \varphi_1 \vee M \models_a \varphi_2 \\ &\iff \forall M, a \neg(M \models_a \varphi_1 \wedge M \not\models_a \varphi_2) \\ &\iff \forall M, a \neg(M \models_a \varphi_1 \wedge M \models_a \neg\varphi_2) \\ &\iff \forall M, a \neg(M \models_a \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \\ &\iff \neg \exists M, a M \models_a \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \end{aligned}$$

Questão 0.3 (Árvores de refutação, 1.5pt)

$\neg(\forall x \forall y \forall z ((Pxz \rightarrow Pyz) \rightarrow Qxy) \wedge \neg \exists y \forall x (Qxx \vee Ry))$ is valid.

1. $\neg(\forall x \forall y \forall z ((Pxz \rightarrow Pyz) \rightarrow Qxy) \wedge \neg \exists y \forall x (Qxx \vee Ry))$
 2. $(\forall x \forall y \forall z ((Pxz \rightarrow Pyz) \rightarrow Qxy) \wedge \neg \exists y \forall x (Qxx \vee Ry))$ (1)
 3. $\forall x \forall y \forall z ((Pxz \rightarrow Pyz) \rightarrow Qxy)$ (2)
 4. $\neg \exists y \forall x (Qxx \vee Ry)$ (2)
 5. $\neg \forall x (Qxx \vee Ra)$ (4)
 6. $\neg(Qbb \vee Ra)$ (5)
 7. $\neg Qbb$ (6)
 8. $\neg Ra$ (6)
 9. $\forall y \forall z ((Pbz \rightarrow Pyz) \rightarrow Qby)$ (3)
 10. $\forall z ((Pbz \rightarrow Pbz) \rightarrow Qbb)$ (9)
 11. $((Pbc \rightarrow Pbc) \rightarrow Qbb)$ (10)
 12. $\neg(Pbc \rightarrow Pbc)$ (11)
 13. Qbb (11)
 14. Pbc (12)
 15. $\neg Pbc$ (12)
- x x

Questão 0.4 (Dedução natural, 4.5pt)

- (a) $\forall x P(a, x, x), \forall x \forall y \forall z P(x, y, z) \rightarrow P(f(x), y, f(z)) \vdash \exists z P(f(a), z, f(f(a)))$

1	$\forall xP(a, x, x)$	premissa
2	$\forall x\forall y\forall zP(x, y, z) \rightarrow P(f(x), y, f(z))$	premissa
3	$P(a, f(a), f(a))$	$\forall xe1$
4	$\forall y\forall zP(a, y, z) \rightarrow P(f(a), y, f(z))$	$\forall xe2$
5	$\forall zP(a, f(a), z) \rightarrow P(f(a), f(a), f(z))$	$\forall xe4$
6	$P(a, f(a), f(a)) \rightarrow P(f(a), f(a), f(f(a)))$	$\forall xe5$
7	$P(f(a), f(a), f(f(a)))$	$\rightarrow_e 3,6$
8	$\exists zP(f(a), z, f(f(a)))$	$\exists xi7$
(b)	$\forall x\forall y\forall zS(x, y) \wedge S(y, z) \rightarrow S(x, z), \forall x\neg S(x, x) \vdash \forall x\forall yS(x, y) \rightarrow \neg S(y, x)$	
1	$\forall x\forall y\forall zS(x, y) \wedge S(y, z) \rightarrow S(x, z)$	premissa
2	$\forall x\neg S(x, x)$	premissa
3	x_0	qualquer x_0
4	y_0	qualquer y_0
5	$S(x_0, y_0)$	hipótese
6	$S(y_0, x_0)$	hipótese
7	$\forall y\forall zS(x_0, y) \wedge S(y, z) \rightarrow S(x_0, z)$	$\forall xe1$
8	$\forall zS(x_0, y_0) \wedge S(y_0, z) \rightarrow S(x_0, z)$	$\forall xe7$
9	$S(x_0, y_0) \wedge S(y_0, x_0) \rightarrow S(x_0, x_0)$	$\forall xe8$
10	$S(x_0, y_0) \wedge S(y_0, x_0)$	$\wedge_i 5,6$
11	$S(x_0, x_0)$	$\rightarrow_e 10,8$
12	$\neg S(x_0, x_0)$	$\forall xe2$
13	\perp	$\neg_e 11,12$
14	$\neg S(y_0, x_0)$	$\neg_i 6-13$
15	$S(y_0, x_0) \rightarrow \neg S(y_0, x_0)$	$\rightarrow_i 5-14$
16	$\forall yS(x_0, y) \rightarrow \neg S(y, x_0)$	$\forall xi4-15$
17	$\forall x\forall yS(x, y) \rightarrow \neg S(y, x)$	$\forall xi3-16$

(c) $\vdash \exists y(\forall xP(x)) \rightarrow P(y)$

1	$\forall xP(x)$	premissa
2	$P(y)$	$\forall xe1$
3	$(\forall xP(x)) \rightarrow P(y)$	$\rightarrow_i 1-2$
4	$\exists y(\forall xP(x)) \rightarrow P(y)$	$\exists xi3$