Lista de soluções 6

Exercício 1
Para demonstrar que um problema pertence a NP, é suficiente mostrar que uma solução pode ser verificada em tempo polinomial. Uma solução do ISO é uma permutação dos vértices em G, e podemos verificar em tempo $O(m)$ se G com essa permutação de vértices é isomórfico com H.

Exercício 2
SAT-DUPLO pertence a NP, porque podemos verificar em tempo polinomial se duas atribuições dadas são diferentes e satisfazem uma dada fórmula φ. Para demonstrar que SAT-DUPLO é NP-difícil, vamos reduzir SAT para SAT-DUPLO. Para uma dada fórmula φ constrói uma fórmula $\psi = \varphi \wedge (x \vee \neg x)$ com uma nova variável x. A fórmula φ é satisfatível se e somente se ψ é satisfatível por pelo menos duas atribuições diferentes.

Exercício 3
Ida: Supõe que $L \in$ coNP com coNP de acordo com a primeira definição. Logo $\overline{L} \in$ NP e existe uma MTND existencial que decide $\overline{L}$ em tempo $p(|x|)$ para um polinômio p. Cria uma nova MTND M' que aceita caso M rejeita e *vice versa*. M' executa igualmente em tempo polinomial $p(|x|)$.
Agora $x \in L$ se e somente se $x \notin \overline{L}$ (por definição), se e somente se todas computações de M rejeitam (por definição da MTND existencial), sse todas computações de M' aceitam (por definição de M').
Volta: Supõe que $L \in$ coNP com coNP de acordo com a segunda definição. Logo existe uma MTND universal que decide L em tempo polinomial $p(|x|)$. Com a mesmo modificação anterior obtemos uma MTND M' existencial que decice $\overline{L}$ em tempo polinomial. Logo $L \in$ coNP pela primeira definição.

Exercício 4
A soma de quadrados mínima (SQM) pertence a NP porque podemos verificar que uma partição respeita o limite L em tempo polinomial. Para demonstrar que ele é NP-difícil vamos reduzir PARTITION para SQM.
Para facilitar a prova vamos introduzir a notação $\sum X = \sum_{i \in X} t_a$ e abreviar $S = \sum A$.
Para uma instância de PARTITION gera uma instância de SQM com os mesmos itens, $k = 2$ e $L = (\sum A)^2/2$. Caso existe um A' com $\sum A' = \sum A \setminus A'$, temos $\sum A' = \sum A \setminus A' = S/2$ e logo existem $A_1 = A'$, $A_2 = A \setminus A'$ tal que $(\sum A_1)^2 + (\sum A_2)^2 = S^2/2 = L$. Conversamente, caso existem A_1, A_2 tal que $(\sum A_1)^2 + (\sum A_2)^2 = (\sum A_1)^2 + (S - \sum A_1)^2 \leq L$ temos $(\sum A_1)^2 + (\sum A_2)^2 = L$ porque a função $f(x) = x^2 + (S - x)^2$ atinge o mínimo no intervalo $[0, S]$ para $x = S/2$ com valor $S^2/2$. Logo temos também $(\sum A_1) = (\sum A_2) = S/2$.

Exercício 5
A redução recebe duas expressões regulares, transforma-las para autômatos finitos e depois testa se os dois autômatos são isomórficos. Caso sim, de fato as linguagens dos autômatas, e consequentemente das expressões regulares são iguais. Caso contrário, os autômatos não são isomórficos, mas isso não implica que eles não reconhecem a mesma linguagem. Da fato, já expressões equivalentes simples como aa^* e $a \cup aaa^*$ geram autômatos não isomórficos.