Lista de soluções 2

Exercício 1
O método de Akra-Bazzi aplica-se para os itens a,b,c,d,e,f, mas não para os restantes porque $b_1 = 1$ no caso g,h,i,j, e porque k não cumpre o formato da recorrência do teorema. Logo temos

a) $p = \log_3 2$ e $T(x) = \Theta(x^{\log_3 2}(1 + \int_1^x u^{-1-\log_3 2})) = \Theta(x^{\log_3 2}(1 + x^{-\log_3 2})) = \Theta(x^{\log_3 2})$;

b) $p = \log_4 5$ e $T(x) = \Theta(x^{\log_4 5}(1 + \int_1^x u^{-\log_4 5})) = \Theta(x^{\log_4 5}(1 + x^{1-\log_4 5})) = \Theta(x^{\log_4 5})$;

c) $p = \log_7 7 = 1$ e $T(x) = \Theta(x(1 + \int_1^x u^{-1})) = \Theta(x(1 + \log x)) = \Theta(x \log x)$;

d) $p = \log_3 9 = 2$ e $T(x) = \Theta(x^2(1 + \int_1 \ xu^{-1})) = \Theta(x^2(1 + \log x)) = \Theta(x^2 \log x)$;

e) $p = \log_2 8 = 3$ e $T(x) = \Theta(x^3(1 + \int_1^x u^{-1})) = \Theta(x^3(1 + \log x)) = \Theta(x^3 \log x)$;

f) $p = \log_{25} 49$ e $T(x) = \Theta(x^{\log_{25} 49}(1 + \int_1^x u^{1/2-\log_{25} 49} \log u)) = \Theta(x^{\log_{25} 49}(1 + x^{3/2-\log_{25} 49} \log x)) = \Theta(x^{3/2} \log x)$.

Para os casos g,h,i temos um único subproblema, logo podemos expandir a recorrência diretamente para obter

g) $T(n) = T(n-1) + 2 = T(n-2) + 2 + 2 = \cdots = O(n)$;

h) $T(n) = T(n-1) + n^c = T(n-2) + (n-1)^c + n^c = \cdots = 1^c + 2^c + \cdots + (n-1)^c + n^c = O(n^{c+1})$;

i) $T(n) = T(n-1) + c^n = T(n-2) + c^{n-1} + c^n = \cdots = c + c^2 + \cdots + c^{n-1} + c^n = (c^{n+1} - c)/(c-1) = O(c^n)$.

Para o caso j podemos observar que a recorrência gera uma árvore binária completa com custo 1 em cada nodo interno e folha, logo $T(n) = \Theta(2^n)$.
No caso k, como existe um único subproblema e cada subproblema possui custo 1 é suficiente determinar o número de k tal que $n^{2^{-k}} \le c$ para uma constante c, logo

$$\begin{aligned} 2^{-k} \log n \le \log c &\iff 2^k \log c \ge \log n \\ &\iff k \log 2 + \log\log c \ge \log\log n \\ &\iff k \ge (\log\log n - \log\log c)/\log 2 \end{aligned}$$

e logo $T(n) = \Theta(\log\log n)$.

Exercício 2
a) Uma potência adequada é 2^2 e temos coeficientes $(1,1,0,0)$ para $1+x$ e $(1,0,1,0)$ para $1+x^2$. Obtemos as chamadas
fft$((1,1,0,0), e^{2\pi i/4} = i) = (2, 1+i, 0, 1-i)$

1. fft$((1,0), -1) = (1,1)$
   1.1 fft$((1), 1) = 1$
   1.2 fft$((0), 1) = 0$
2. fft$((1,0), -1) = (1,1)$
   (igual chamada 1.)

fft$((1,0,1,0), i) = (2,0,2,0)$

1. fft$((1,1), -1) = (2,0)$
   1.1 fft$((1), 1) = 1$
   1.2 fft$((1), 1) = 1$
2. fft$((0,0), -1) = (0,0)$

1.1 $\mathrm{fft}((0), 1) = 0$

1.2 $\mathrm{fft}((0), 1) = 0$

e logo o produto corresponde com a sequência $(4, 0, 0, 0)$ e temos
$\mathrm{fft}((4, 0, 0, 0), 1/i) = (4, 4, 4, 4)$

1. $\mathrm{fft}(4, 0), -1) = (4, 4)$

   1.1 $\mathrm{fft}((4), 1) = 4$

   1.2 $\mathrm{fft}((0), 1) = 0$

2. $\mathrm{fft}(0, 0), -1) = (0, 0)$
   (ver chamada igual acima)

Para obter os coeficientes temos que dividir $(4, 4, 4, 4)$ por $n = 4$ obtendo $(1, 1, 1, 1)$ logo o produto é $1 + x + x^2 + x^3$.

b) Uma potência adequada é 2^2 e temos coeficientes $(1, 1, 2, 0)$ para $1+x+2x^2$ e $(2, 3, 0, 0)$ para $2+3x$. Obtemos as chamadas
$\mathrm{fft}((1, 1, 2, 0), i) = (4, -1 + i, 2, -1 - i)$

1. $\mathrm{fft}((1, 2), -1) = (3, -1)$

   1.1 $\mathrm{fft}((1), 1) = 1$

   1.2 $\mathrm{fft}((2), 1) = 2$

2. $\mathrm{fft}((1, 0), -1) = (1, 1)$
   (ver chamada igual acima)

$\mathrm{fft}((2, 3, 0, 0), i) = (5, 2 + 3i, -1, 2 - 3i)$

1. $\mathrm{fft}((2, 0), -1) = (2, 2)$

   1.1 $\mathrm{fft}((2), 1) = 2$

   1.2 $\mathrm{fft}((0), 1) = 0$

2. $\mathrm{fft}((3, 0), -1) = (3, 3)$

   2.1 $\mathrm{fft}((3), 1) = 3$

   2.2 $\mathrm{fft}((0), 1) = 0$

e logo o produto corresponde com a sequência $(20, -5 - i, -2, -5 + i)$ e temos
$\mathrm{fft}((20, -5 - i, -2, -5 + i), 1/i) = (8, 20, 28, 24)$

1. $\mathrm{fft}((20, -2), -1) = (18, 22)$

   1.1 $\mathrm{fft}((20), 1) = 20$

   1.2 $\mathrm{fft}((-2), 1) = -2$

2. $\mathrm{fft}((-5 - i, -5 + i), -1) = (-10, -2i)$

   2.1 $\mathrm{fft}(-5 - i, 1) = -5 - i$

   2.2 $\mathrm{fft}(-5 + i, 1) = -5 + i$

Para obter os coeficientes temos que dividir $(8, 20, 28, 24)$ por $n = 4$ obtendo $(2, 5, 7, 6)$ logo o produto é $2 + 5x + 7x^2 + 6x^3$.

Exercício 3

a) Podemos calcular

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

logo as cinco multiplicações a^2, d^2, bc, $b(a + d)$, e $c(a + d)$ são suficientes.

b) A abordagem não se aplica para matrizes, porque o produto de matrizes não é comutativo, logo $BC \neq CB$, por exemplo.

c) Dado um algoritmo que retorna o quadrado em $O(n^c)$ podemos calcular

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$$

para obter o produto de A e B em tempo $O((2n)^c) = O(n^c)$.

Exercício 4
Podemos dividir o vetor em dois vetores com o metade dos elementos $v = (v_1\ v_2)^t$ para obter

$$H_k v = \begin{pmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{k-1}(v_1 + v_2) \\ H_{k-1}(v_1 - v_2) \end{pmatrix}$$

e o produto com um vetor de tamanho n pode ser calculado por dois produtos com vetores de tamanho $n/2$ e um trabalho linear, logo

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(x + (1 + \int_1^n 1/u)) = \Theta(n \log n).$$

Exercício 5
a) Podemos chamar pot2bin$(n/2)$. A complexidade desse algoritmo é (via Akra-Bazzi)

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(n^{\log_2 3}) = \Theta(x^0(1 + \int_1^n u^{\log_2 3 - 1})) = \Theta(n^{\log_2 3}).$$

b) Podemos chamar multiplicação_binário (dec2bin(x_L),pot2bin($n/2$))+dec2bin(x_R). A complexidade do algoritmo resultante é (via Akra-Bazzi)

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n^{\log_2 3}) = \Theta(n(1 + \int_1^n u^{\log_2 3 - 2})) = \Theta(n + (1 + n^{\log_2 3 - 1})) = \Theta(n^{\log_2 3}).$$