Lista de exercícios Teoria de complexidade
Entrega: 24 de junho de 2012

Exercício 1
Dois grafos G e H são *isomórficos* caso podemos ordenar os vértices de G tal que o grafo é idêntico com H. Seja $\mathsf{ISO} = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ e } H \text{ são isomórficos}\}$. Mostra que $\mathsf{ISO} \in \mathsf{NP}$.

Exercício 2
Seja $\mathsf{SAT\text{-}DUPLO} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ é satisfatível por pelo menos duas atribuições diferentes}\}$. Mostra que SAT-DUPLO é NP-completo.

Exercício 3
Na aula discutimos duas formas de entender a classe coNP. No que segue vamos supor que $\Sigma = \{0, 1\}$. A *definição* dada em aula foi

> **Definição 1 (Co-classes)**
> Para uma linguagem L, a *linguagem complementar* é $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$. Para uma classe de complexidade C, a *co-classe* $co-C = \{\overline{L} \mid L \in C\}$ e a classe das linguagens complementares.

Foi *explicado* em aula que podemos definir coNP como classe de linguagens decidíveis em tempo polinomial por uma MTND com *quantificação universal*:

> **Definição 2 (coNP via quantificação universal)**
> Para linguagem L, temos $L \in \mathsf{coNP}$ caso existe uma MTND M, e um polinômio p tal que
>
> $$x \in L \iff \text{todas computações de } M \text{ com tempo no máximo } p(|x|) \text{ aceitam.}$$

Prove que as duas definições são equivalentes.

Exercício 4
Mostra que

SOMA DE QUADRADOS MÍNIMA
Entrada Um conjunto de itens $A = [n]$ com tamanhos $t_a, a \in A$, um número k e um limite L.
Decisão Existe uma partição de A em k conjuntos $A_1, \ldots, A_k$ tal que $$\sum_{i\in[k]} \Bigl(\sum_{j\in A_i} t_a\Bigr)^2 \leq L?$$

é NP-completo.
Dica: Reduz um problema NP-completo para este problema. Podes supor que os problemas SAT, 3-SAT, 3-DIMENSIONAL MATCHING, VERTEX COVER, CLIQUE, HAMILTONIAN CIRCUIT, e PARTITION são NP-completos (ver abaixo).

Exercício 5 (Opcional)
Considera a seguinte prova publicado por Delacorte [2] que o problema de isomorfismo de grafos (GI) é PSPACE-completo:

> The equivalence problem for regular expressions was shown to be PSPACE-complete by Meyer e Stockmeyer [4]. Booth [1] has shown that isomorphism of finite automata is equivalent to graph isomorphism. Taking these two results together with the equivalence of regular expressions, right-linear grammars, and finite automata see Hopcroft e Ullman [3] for example, shows that graph isomorphism is PSPACE-complete.

Sabendo que isomorfismo de grafos (ver exercício 1) pertence a NP isso implicaria PSPACE = NP. Encontra o erro na prova.

Lista de alguns problemas NP-completos

SAT

Entrada Uma fórmula φ da lógica proposicional em forma normal conjuntiva.

Decisão Existe uma atribuição que satisfaz φ?

3-SAT

Entrada Uma fórmula φ da lógica proposicional em forma normal conjuntiva, com exatamente três literais por cláusula.

Decisão Existe uma atribuição que satisfaz φ?

3-DIMENSIONAL MATCHING

Entrada Um conjunto de triplas $M \subseteq X \times Y \times Z$, com X, Y e Z conjuntos disjuntos da mesma cardinalidade q.

Decisão Existe um subconjunto de q triplas $M' \subseteq M$ ($|M'| = q$) tal que nenhum par de triplas contém o mesmo elemento em alguma posição?

VERTEX COVER

Entrada Um grafo não-direcionado $G = (V, A)$ e um número k.

Decisão Existe um cobertura de vértices C, i.e., $C \subseteq V$ tal que para cada $a \in A$ temos $a \cap C \neq \emptyset$, de tamanho no máximo k?

CLIQUE

Entrada Um grafo não-direcionado $G = (V, A)$ e um número k.

Decisão O grafo G contém uma *clique* C, i.e., $C \subseteq V$ tal que todo par de vértices em C é ligado por uma aresta em A, de tamanho (exatamente) k?

HAMILTONIAN CIRCUIT

Entrada Um grafo não-direcionado $G = (V, A)$.

Decisão O grafo G contém um *circuito Hamiltoniano*, i.e., uma sequencia dos $n = |V|$ vértices $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in A$ para $i \in [n-1]$ e $\{v_n, v_1\} \in A$?

PARTITION

Entrada Um conjunto de itens $A = [n]$ com tamanhos $t_a, a \in A$.

Decisão Existe um subconjunto $A' \subseteq A$, tal que $\sum_{a \in A'} t_a = \sum_{a \in A \setminus A'} t_a$?

Referências

[1] K. S. Booth. "Isomorphism testing for graphs, semigroups, and finite automata are polynomiamlly equivalent problems". Em: *SIAM J. Comput.* 7.3 (1978).

[2] Matthew Delacorte. *Graph Isomorphism is PSPACE-complete*. 2007. arXiv:0708.4075v1 [cs.CC].

[3] John E. Hopcroft e Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison Wesley, 1979.

[4] A. R. Meyer e L. J. Stockmeyer. "The equivalence problem for regular expression with squaring requires exponential time". Em: *Proc. 12th IEEE Symposium on Switching and Automata Theory*. 1972, pp. 125–129.