Plano da apresentação

- lógica modal básica (LMB) e logo a seguir veremos

- duas extensões de (LMB): lógica dinâmica e lógica temporal.

- alguns princípios cognitivos e lógica modal.

- ênfase em aspectos de *engenharia de lógica*

São assumidos conhecimentos básicos de lógica proposicional e quantificação, relações e semântica operacional

Lógica Modal Básica - LMB

- A linguagem da LMB é definida a partir de um conjunto de símbolos proposicionais p, q, $\ldots$ e de um operador modal unário $\Diamond$ de acordo com a seguinte gramática, onde φ, ψ, $\ldots$ denotam fórmulas de LMB:

$$\varphi \quad ::= \quad p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \Diamond\varphi.$$

- Operador modal, $\Box$, pode ser definido como

$$\Box\varphi \quad \equiv \quad \neg\Diamond\neg\varphi.$$

Semântica Intuitiva de $\Box$ e $\Diamond$

- $\Diamond\varphi$ é lida como "φ é possível" e
- $\Box\varphi$ é lida como "φ é necessária".

De acordo com essa interpretação alguns princípios que, em geral, são considerados como válidos são:

- $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$: "aquilo que é necessário é possível",
- $\Box\varphi \rightarrow \varphi$: "aquilo que é necessário é verdadeiro".
- $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$: "aquilo que é verdade é possível".

Semântica de Mundos Possíveis

Para decidirmos se uma fórmula da LMB é um princípio válido, ou se ela é satisfeita em alguma interpretação precisamos definir um aparato técnico cujos componentes principais são

- *frames* e
- *modelos*.

Frames

Definição 1 *Um* frame *para LMB é um par*

$$\mathcal{F} = (W, R_\Diamond)$$

tal que:

- W *é um conjunto não vazio de elementos* $w_1, w_2, \ldots$
- $R_\Diamond \subseteq W \times W$*, ou seja,* $R_\Diamond$ *é uma relação binária sobre* W*.*

- ou seja, um frame para LMB é um conjunto com uma relação entre seus elementos

- Os elementos de W são: *mundos*, *situações*, *instantes*, *tempos*, *estados*, ou *pontos*.

- Para lógica modal básica abreviamos $R_\Diamond$ para R simplesmente.

Modelos

Definição 2 *Um* modelo *para LMB é um par*

$$\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V),$$

onde $\mathcal{F}$ é um frame e V é uma função que atribui, a cada símbolo proposicional, um subconjunto de W.

Intuitivamente, $V(p)$ é o conjunto de elementos de W onde o símbolo proposicional p é verdadeiro.

Exemplo:

- frame $\mathcal{F} = (W, R)$ onde
  - $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ e
  - $R = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_4), (w_4, w_5)\}$.

- modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ onde
  - $V(p) = \{w_2, w_3\}$,
  - $V(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ e
  - $V(r) = \{\ \}$.

- da perspectiva de w_1 analisar
  - $\Diamond\Box p$
  - $\Diamond\Box p \rightarrow p$
- a partir de w_2
  - $\Diamond(p \wedge \neg r)$.

Definição 3 *Seja w um estado em um modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ onde $\mathcal{F} = (W, R)$ é um frame. A noção de satisfação de uma fórmula φ da lógica modal básica, no modelo $\mathcal{M}$, em um estado w, é definida da seguinte forma:*

- $\mathcal{M}, w \models p$ *sse* $w \in V(p)$
- $\mathcal{M}, w \not\models \bot$
- $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$ *sse* $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$
- $\mathcal{M}, w \models \varphi \vee \psi$ *sse* $\mathcal{M}, w \models \varphi$ *ou* $\mathcal{M}, w \models \psi$
- $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$ *sse* $\exists\, w' \in W$*, tal que* $R(w, w')$ *e* $\mathcal{M}, w' \models \varphi$
- $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ *sse* $\forall\, w' \in W,\ R(w, w')$ *implica em* $\mathcal{M}, w' \models \varphi$*.*

Noções de verdade, satisfação e validade

- Se $\mathcal{M}, w \models \varphi$ dizemos que φ *é satisfeita (ou é verdadeira) no estado* w *do modelo* $\mathcal{M}$. Esta noção de satisfação é dita *interna* ou *local*, pois é feita dentro de um modelo e tomando um estado como referência.

- Uma fórmula φ é dita *satisfatível, ou verdadeira, em um modelo* se existe algum estado em $\mathcal{M}$ no qual φ é verdadeira.

- Uma fórmula é dita *globalmente satisfatível (ou globalmente verdadeira)* se ela é satisfatível em todos os estados de $\mathcal{M}$.

Exemplo 1 *Considere* $\mathcal{F} = (W, R)$ *onde* $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ *e* $R = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_4), (w_4, w_5)\}$*. Se a função* V *de valoração é tal que* $V(p) = \{w_2, w_3\}$*,* $V(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ *e* $V(r) = \{\ \}$*, em um modelo* $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ *temos que*

- $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond\Box p$
- $\mathcal{M}, w_1 \not\models \Diamond\Box p \rightarrow p$
- $\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond(p \wedge \neg r)$*.*

$\Box q$ *é globalmente satisfatível em* $\mathcal{M}$*: é satisfatível em todos os estados* w_1, w_2, w_3*, e* w_4 *e, por vacuidade, satisfatível em* w_5 *pois nenhum outro mundo é acessível a partir dele.*

Exemplo 2 *Considere* $\mathcal{F} = (W, R)$ *onde* $W = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ *e a relação* R *contém todos os pares* (x, y) *tal que* x *é diferente de* y *e* y *pode ser dividido por* x. *Se a função* V *de valoração é tal que* $V(p) = \{4, 8, 12, 24\}$, $V(q) = \{6\}$, *em um modelo* $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ *temos que*

- $\mathcal{M}, 4 \models \Box p$

- $\mathcal{M}, 6 \models \Box p$

- $\mathcal{M}, 2 \not\models \Box p$

- $\mathcal{M}, 2 \models \Diamond(q \wedge \Box p) \wedge \Diamond(\neg q \wedge \Box p)$.

- Relação $R_\diamond$, juntamente com valoração V são cruciais para saber se um fórmula é verdadeira.

- Relação $R_\diamond$ é crucial para saber se um fórmula é válida.

- Até aqui a relação que equipa modelos pode ser qualquer.

Lógica Temporal e Lógica Dinâmica

- SMAs são constituídos de vários agentes atuando em paralelo e trocando informaçoes entre si,

- lógicas modais largamente utilizadas em concorrência e em sistemas distribuídos, têm influência marcante no estudo de lógicas para SMAs.

Lógica Temporal Básica - LTB

A linguagem para LTB possui dois operadores modais unários:

- $\langle F \rangle$ para futuro
- $\langle P \rangle$ para passado

$\langle F \rangle \varphi$: φ *será verdadeira em algum tempo futuro*.

$\langle P \rangle \varphi$: φ *foi verdadeiro em algum tempo passado*.

- Outros dois operadores modais, $[G]$ e $[H]$.

- $[G]\varphi$: φ *sempre será verdadeira*. O que equivale a dizer que *não é verdade, que em algum tempo do futuro,* φ *será falso*, ou seja

$$[G]\varphi \equiv \neg\langle F\rangle\neg\varphi.$$

- $[H]\varphi$: φ *sempre tem sido verdadeira*. O que é o mesmo que *não é verdade que, em algum tempo do passado,* φ *foi falsa*, ou seja

$$[H]\varphi \equiv \neg\langle P\rangle\neg\varphi.$$

- Em LTB, os elementos de W são chamados de *tempos*.

- Usamos T no lugar de W e $t, t', \ldots$ para os elementos de T.

- Frames para LTB devem ser equipados com

$$R_F \subseteq T \times T \quad e \quad R_P \subseteq T \times T.$$

- Tanto R_F como R_P devem ser apropriadas para interpretação desejada para tempo.

- Considere por exemplo que tempo t está antes do tempo t'.

- ou seja, $R_P(t, t')$

- A relação R_F deve pois, ser tal que $R_F(t', t)$.

- Em outras palavras, R_P e R_F devem ser o inverso uma da outra.

- Formalmente, R_P e R_F devem satisfazer

$$\forall\, t, t' \in T.\ R_P(t, t') \;\leftrightarrow\; R_F(t', t).$$

- basta definir somente uma das relações, que chamaremos de R; a outra está implicitamente definida como sendo o seu inverso.

- Note contudo, que não basta que R_P e R_F sejam uma o inverso da outra.

- Ambas devem ter outras propriedades essenciais para serem usadas na interpretação de modalidades temporais.

- Tanto uma como a outra devem ser relações transitivas:

$$\forall\, s, t, u \,\in\, T.\;\; R(s,t) \,\wedge\, R(t,u) \,\rightarrow\, R(s,u).$$

Semântica para Lógica Temporal Básica

Seja $\mathcal{M} = (T, R, V)$ um modelo, onde R está de acordo com as exigências acima. Temos então que:

- $\mathcal{M}, t \models \langle F \rangle \varphi$ sse existe t' tal que $R(t, t')$ e $\mathcal{M}, t' \models \varphi$
- $\mathcal{M}, t \models \langle P \rangle \varphi$ sse existe t' tal que $R(t', t)$ e $\mathcal{M}, t' \models \varphi$.

Observe que diferença em relação a LMB é o conjunto de propriedades da relação R !!

Outras concepções de tempo

- relações com diferentes propriedades levam a diferentes concepções de tempo.
- relação pode corresponder a uma visão ramificada de tempo, ou seja R tem a estrutura de uma árvore (Lógica Temporal Ramificada)
- desejável caso queiramos considerar diferentes cursos de ações ao longo do tempo.

Ações

- lógica dinâmica proposicional (LDP)

- possui infinitos operadores modais !!

- Cada um tem a forma $\langle a \rangle \varphi$, onde a denota um programa

- $\langle a \rangle \varphi$: *em alguma execução de a, iniciada no estado atual e que termina, o estado resultante satisfaz* φ.

- programa a pode ser nao-determinístico (por isso o ”em alguma execucão”).

- Cada operador modal $\langle a \rangle$ possui o seu dual $[a]\varphi \equiv \neg\langle a \rangle\varphi$.

- $[a]\varphi$: *toda execução de a, iniciada no estado atual, leva a um estado que satisfaz* φ.

- O núcleo de LDP em geral assume que essa linguagem de programação possui :

  - execução seqüencial de a seguido de b ($a; b$),
  - escolha não-determinística entre a e b ($a + b$) e
  - repetição de a por um nro. finito (possivelmente zero) de vêzes (a^*).

- se $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ são operadores modais de LDP então também o são $\langle a + b \rangle$, $\langle a; b \rangle$ e $\langle a^* \rangle$.

- Outros construtores de programas podem ser adicionados para:
  - execução tanto de a como de b em paralelo ($a \mid b$) e
  - execução de um teste de um fórmula φ de LDP (φ?).

- com ? obtemos um operador modal a partir de uma fórmula !!

- construtor ? pode ser usado para representar `if`:

$$\texttt{if}\ p\ \texttt{then}\ a\ \texttt{else}\ b \equiv (p?; a) + (\neg p?; b).$$

- Exemplos:
  - $\langle a; b\rangle\varphi$: alguma execução, iniciada no estado atual, de a seguido de b, leva a um estado que satisfaz φ,
  - $\langle a \mid b\rangle\varphi$: alguma execução, inicada no estado atual, de a e de b leva a um estado, alcançável por ambos, que satisfaz φ.

Modelos para LDP

- Modelos para LPD equipados com um conjunto de relações

$$R_a \subseteq W \times W$$

- uma para cada operador modal $\langle a \rangle$, onde a é um programa.

- Essas relações não podem ser arbitrárias !

- Essas relações são definidas pela semântica operacional da linguagem de programação !

- Exemplos de propriedades de algumas relações

$$
\begin{array}{lcl}
R_{a+b} & = & R_a \cup R_b \\
R_{a;b} & = & R_a \circ R_b \\
R_{a^*} & = & (R_a)^* \ \text{(}\textit{o fecho reflexivo e transitivo de } R_{a^*}\text{)}.
\end{array}
$$

Semântica para LDP

- Seja $\mathcal{M} = (W, \{R_a | a$ *é um programa* $\}, V)$ um modelo onde cada R_a satisfaz as exigências acima, a semântica de $\langle a \rangle \varphi$ e de $[a]\varphi$ é definida da seguinte forma:
  - $\mathcal{M}, w \models \langle a \rangle \varphi$ sse $\exists\, w' \in W$, tal que $R_a(w, w')$ e $\mathcal{M}, w' \models \varphi$
  - $\mathcal{M}, w \models [a]\varphi$ sse $\forall\, w' \in W$, $R_a(w, w')$ implica $\mathcal{M}, w' \models \varphi$.

Conhecimento

- Podemos ler $\Box\varphi$ como "o agente sabe φ".

- Com essa interpretação, $\Box$ é usualmente escrito como $[K]$.

- Exemplo de princípio válido

$$[K]\varphi \rightarrow \varphi,$$

  ou seja, se o agente sabe φ, então isso implica que φ é verdadeiro.

- $\varphi \rightarrow [K]\varphi$ não é princípio válido: se φ é verdadeiro isso não implica que o agente sabe a respeito de φ.

Crença

- Outra leitura para $\Box\varphi$: "o agente acredita que φ é verdadeira".
- Com essa interpretação, $\Box$ é usualmente escrito como $[\mathtt{Bel}]$.
- $[\mathtt{Bel}]\varphi \rightarrow \varphi$ não é um princípio válido: se o agente acredita em φ, isso não implica que φ é verdadeira.

- Os elementos de W são chamados de situações, tempos ou momentos.

- T no lugar de W e $t, t', \ldots$ para os elementos de T.

- Temos que associar a [`Bel`] uma relação binária $R_{\texttt{Bel}} \subseteq T \times T$ e a $[K]$ uma relação $R_K \subseteq T \times T$.

Relação de satisfatibilidade para crença

Seja $\mathcal{M} = (T, R_{\mathtt{Bel}}, V)$ um modelo, temos que:

$$\mathcal{M}, t \models [\mathtt{Bel}]\varphi \ \textit{sse} \ \forall t' \in T \ \ R_{\mathtt{Bel}}(t, t') \ \textit{implica} \ \mathcal{M}, t' \models \varphi.$$

Relaçao de satisfatibilidade para conhecimento

Seja $\mathcal{M} = (T, R_K, V)$:

$\mathcal{M}, t \models [K]\varphi$ *sse* $\forall\, t' \in T\ \ , R_K(t, t')$ *implica* $\mathcal{M}, t' \models \varphi$.

- Se $R_{\mathtt{Bel}}$ e R_K são relações quaisquer em $T \times T$ não temos como garantir que os operadores modais corresponderão a interpretação desejada.

- Para diferenciarmos crença de conhecimento a relação R_K deve ser reflexiva.

Dessa forma podemos verificar que

- $[K]\varphi \rightarrow \varphi$ é um principio válido a respeito de conhecimento
- $[\texttt{Bel}]\varphi \rightarrow \varphi$ pode ou não ser satisfatível.
- Outros princípios desejáveis podem exigir outras propriedades das relações.

Desejos e Intenções

- O operador [`Des`] é utilizado para expressar desejo de um agente.

- Fórmula [`Des`]φ é lida ”o agente deseja φ”.

- Para formalizarmos princípios a respeito de intenções usamos o operador modal [`Int`].

- Fórmula [`Int`]φ significa que o agente intenciona φ.

Propriedades - I

- **Intenções satisfeitas** - $\texttt{Int}\varphi \rightarrow E\langle F\rangle\varphi$. Ou seja, se o agente intenciona φ então essa intenção é satisfeita, ou seja ela eventualmente ocorre em algum caminho.

Propriedades - II

- **Consistência temporal** - $(\texttt{Int}\varphi \wedge \texttt{Int}\psi) \rightarrow \texttt{Int}(\langle F\rangle\varphi \wedge \langle F\rangle\psi)$. Isso significa que se o agente intenciona φ e intenciona ψ então ele intenciona ambos em algum ordem temporal, ou simultaneamente.

- Compare com (desejável?)

$$(\texttt{Int}\varphi \wedge \texttt{Int}\psi) \rightarrow \texttt{Int}(\varphi \wedge \psi).$$

Propriedades - III

- **Persistência não implica em sucesso**. Isso é expresso por

$$E[G](\texttt{Int}\varphi \wedge \neg\varphi)$$

ou seja eventualmente o seguinte pode ser verdadeiro: contínua intenção e falha em alcançar o que é intencionado.

Como definir os conceitos apropriados ?

- Como era de se esperar, existem divergências filosóficas quanto a concepções sobre o que são princípios cognitivos válidos

- Essas divergências levam por sua vez a sistemas lógicos diferentes.

Multi-disciplinaridade - Filosofia

- Teória e prática de uma corrente em SMAs fortemente influenciada pelo trabalho de Bratman em Filosofia.

- Bratman defende que os 3 componentes básicos que governam o comportamento humano são
  - **B**eliefs,
  - **D**esires,
  - **I**ntentions.

Do ponto de vista técnico

- uma vez escolhida uma concepção filosófica, a chave para a criação de uma lógica modal expressiva e fiel a tal concepção
  - escolha de operadores modais apropriados,
  - definição das propriedades das relações que farão parte dos frames
  - prova de meta-propriedades.

Uso de Lógicas para Conceitos Cognitivos - I

- agentes podem ser definidos de tal forma que seus comportamentos sejam ”guiados” por princípios cognitivos válidos
- O agente deve fazer uma ação somente se ela está de acordo com seus desejos, crenças intençoes, e ação só deve ser feita se o seu efeito não violar princípios cognitivos.
- Isso implica que o agente deve ser capaz de provar automaticamente teoremas usando o sistema formal de lógicas cognitivas.

Uso de Lógicas para Conceitos Cognitivos - II

- Outra possibilidade, mais tradicional em computação, é fazer uso de uma lógica cognitiva para especificar e verificar se as ações de um agente estão de acordo com princípios cognitivos.

- Neste caso, tanto técnicas de prova de teoremas e verificação de modelos (”model cheking”) podem ser usadas.

- Como era de se esperar, quanto mais expressiva é uma lógica, mais difícil é a atividade de prova de teoremas ou de verificaçao de modelos.

- Vários resultados a respeito de decidibilidade e complexidade exitem para lógicas temporais, dinâmicas e para lógicas do conhecimento.

- Resultados e técnicas obtidas com essas lógicas têm sido extendidos para Lógicas BDI.

I think a logical system is really what AI people call agents. The whole matter comes into it, and that's a system: evolving, maybe continuously reacting systems. The way we are; I am a logic, each one of us is a logic. Someone said: 'Each man is a world unto itself.' I say: 'Each man is a logic unto himself.'.

Dov Gabbay