

Da ação ao conhecimento: relações entre Epistemologia Genética, Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais

Rodrigo Sychocki da Silva¹, Dante Augusto Couto Barone², Marcus Vinicius de Azevedo Basso³.

^{1,3} Instituto de Matemática e Estatística. Departamento de Matemática Pura e Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Porto Alegre (RS), Brasil.

² Instituto de Informática. Departamento de Informática Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Porto Alegre (RS), Brasil.
sychocki.rodrigo@gmail.com

Resumo. O objetivo do texto é apresentar um recorte de uma pesquisa de doutorado realizada entre 2014 e 2015. A partir de aportes teóricos ancorados na literatura sobre Modelagem Matemática, Tecnologias Digitais e Epistemologia Genética construiu-se a problemática de pesquisa. A tese debruçou-se em observar e analisar as formas e características das estruturas de pensamento desenvolvidos pelos participantes ao longo de três experimentos didáticos. Ao fazer uso das Tecnologias Digitais observou-se que o processo de construção/validação de hipóteses e modelos matemáticos dependeu da ação, seja material ou mental, e da coordenação das mesmas, próprias da criatividade e motivação do sujeito em ultrapassar os desafios impostos pelos objetos do conhecimento.

Palavras-chave: Ação, Abstração, Tecnologias Digitais.

1 Introdução e construção do problema de pesquisa

Segundo D'Ambrosio (1996), a matemática é uma ciência complexa e requer tempo para que os sujeitos logrem a compreensão de seus conceitos. Numa leitura das diretrizes oficiais para a educação básica brasileira se percebe uma intencionalidade da organização curricular para a valorização da interdisciplinaridade. O que se observa, por vezes ao contrário, é a realização de um ensino de matemática fragmentado; onde o estudante talvez não consiga de modo próprio se dar conta da importância que a ciência matemática tem na modelagem e resolução de situações-problema que ocorrem em diversos fenômenos.

Conforme nas palavras de Brasil (2013, p.244) “a organização curricular deve fundamentar-se em metodologia interdisciplinar, que rompa com a fragmentação do conhecimento e a segmentação presentes na organização disciplinar tradicionalmente adotada de forma linear”. Nesta ideia, a interdisciplinaridade também é manifestada

no parecer¹ das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada dos Profissionais do Magistério da Educação Básica. No documento é possível perceber a intencionalidade quanto às formas de elaboração e construção do conhecimento, sugerindo-se que o mesmo não ocorra de forma isolada e fragmentada. Quanto à matemática, durante a formação inicial do professor, acredita-se que a interdisciplinaridade deva ser valorizada e assim oportunize a construção dos mais diversos conhecimentos matemáticos, implicando em futuras contribuições na matemática desenvolvida na sua sala de aula.

Logo, a partir de um olhar sobre *como* os sujeitos constroem e reconstróem conceitos de matemática em determinado contexto fazendo-se uso das tecnologias digitais, elaborou-se a seguinte problemática no curso de doutorado: *Como evolui a abstração refletida (abstração reflexionante com tomada de consciência), na construção de conceitos matemáticos durante a exploração de situações-problemas de modelagem matemática com Cadeias de Markov em uma sequência didática usando objetos virtuais?* A pesquisa, que envolveu o estudo de conceitos da psicologia cognitiva e das tecnologias digitais, procurou mostrar que a partir da ação (material ou mental) e seu aperfeiçoamento, os sujeitos desenvolvem uma qualidade nova de pensamento, denominado *hipotético-contínuo* (SILVA, 2015, p.16)

O presente artigo é um recorte da pesquisa de doutorado de Silva (2015) na qual o autor explora a partir de leituras sobre Modelagem Matemática, Epistemologia Genética e Tecnologias Digitais, a criação, aplicação e reflexão sobre sequências de atividades que versavam a construção de modelos envolvendo Cadeias de Markov². Percebeu-se a partir do contexto da pesquisa, que as tecnologias digitais desempenharam um importante papel, sendo essenciais na construção, validação e reconstrução de hipóteses pelos participantes durante o processo. Uma consequência dos experimentos didáticos realizados na pesquisa de doutorado foi mostrar o quanto o cérebro e sua infinita complexidade possa se mobilizar na direção da construção de conceitos matemáticos a partir da análise e estudo das situações-problema, onde a tecnologia seja um meio para a articulação das ideias.

O presente manuscrito objetiva apresentar um recorte teórico-metodológico dos experimentos didáticos realizados na pesquisa e refletir o quanto a inserção da tecnologia no ensino da matemática possa contribuir na formação dos sujeitos. Almeja-se refletir e convidar à discussão, aderente ao evento proposto, sobre o ganho qualitativo na incorporação e uso efetivo das tecnologias digitais no ensino, em particular com o olhar no processo de aprendizagem da matemática.

2 Aporte teórico da pesquisa: primeira parte

A realidade e seus complexos fenômenos fazem com que a matemática seja uma ferramenta, ou ainda, um recurso que torna possível aproximar-se cada vez mais

¹ Parecer disponível em:

[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17625-
parecer-cne-cp-2-2015-aprovado-9-junho-2015&category_slug=junho-2015-
pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17625-parecer-cne-cp-2-2015-aprovado-9-junho-2015&category_slug=junho-2015-pdf&Itemid=30192) (acesso em julho de 2017)

² Para saber mais sobre o assunto consulte o capítulo três da tese de doutorado de Silva (2015).

dos objetos da realidade. Um dos modos de realizar uma aproximação é encarar uma representação da realidade fazendo-se uso da Modelagem Matemática. Sobre a possibilidade de a modelagem ser uma das possíveis representações da complexa realidade, Skovsmose (2011) disserta:

A concepção de *modelagem matemática como representação* (grifo do autor) da realidade está relacionada a um dualismo, a uma perspectiva de dois-mundos. Por um lado, podemos operar com conceitos matemáticos como sendo parte do mundo das estruturas, como sugerido pelo formalismo. Por outro, podemos operar com a realidade do mundo empírico. Um modelo matemático se torna uma representação de parte dessa realidade. Decerto, tal representação não pode ser completa. Como poderíamos sonhar em fazer uma representação completa da realidade? Mas a linguagem matemática pode representar diferentes aspectos da realidade. As noções da teoria matemática selecionada podem se referir aos objetos empíricos, e as relações entre esses objetos podem ser descritos em termos de equações. (SKOVSMOSE, 2007, p.107)

Ao mesmo tempo em que avança o desenvolvimento da matemática, a Modelagem Matemática busca, por meio do estabelecimento e manutenção de relações entre os sujeitos e os objetos do conhecimento, empenhar-se na compreensão da realidade. A tentativa de criar relações e expressar em termos de equações os mais diversos fenômenos faz da Modelagem Matemática uma proposta investigativa, baseada principalmente na elaboração, verificação e validação de hipóteses por parte do sujeito. Neste contexto, tratando-se da influência que a Modelagem Matemática possa ter, Almeida *et al* (2012), Biembengut e Hein (2011) discutem importantes contribuições para o ensino da matemática, especialmente no debate que envolve o uso da Modelagem Matemática na investigação de situações-problema.

Bassanezi (2002) defende que ao mesmo tempo em que as ideias são construídas elas também estão sendo reorganizadas e reconstruídas, constituindo uma tentativa de melhorar a compreensão da realidade. A elaboração de um modelo matemático constitui uma etapa importante durante a investigação, pois possibilita que o sujeito envolvido desenvolva e aja sobre diferentes representações para o fenômeno. Sobre o trabalho de agir sobre a realidade, Bassanezi (2002) argumenta:

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele. (BASSANEZI, 2002, p.24)

Logo, a Modelagem Matemática consiste em um gradual processo, no qual o sujeito desenvolve suas estratégias e formas de ações para analisar e investigar determinada situação-problema. Consiste em um importante método para a aprendizagem da matemática, pois envolve o desenvolvimento de um comportamento investigativo e reflexivo durante sua ação no estudo de um problema matemático.

Sobre a incorporação e uso de recursos tecnológicos no ensino da matemática, a literatura estudada mostra que tal fato constitui-se num aspecto importante na formação de todos os participantes. Em aderência e convergência sobre as contribuições que as tecnologias proporcionam ao ensino consultou-se Almeida *et al* (2012), Powell (2014), Tall e Dubinsky (1991), Tall (1986, 1999), Allevato (2005), Borssoi (2013), Malheiros (2004), Soares (2012), Araújo (2002) e Soistak (2010). Os autores discutem contribuições para o ensino da matemática, especialmente no debate que envolve o uso das tecnologias e da Modelagem Matemática na investigação de situações-problema.

Portanto, considera-se que ao inserir uma proposta de trabalho envolvendo o uso da Modelagem Matemática na investigação e construção de conceitos matemáticos estabelece-se entre todos os envolvidos uma reconstrução de saberes e conceitos prévios. Ou seja, a cada passo que avança a investigação matemática no sentido da compreensão do objeto de conhecimento ou fenômeno em estudo, professor e estudantes (re)constróem e (re)significam os conceitos, potencializando qualitativamente o momento de aprendizagem. Neste caso, o uso da tecnologia digital surge como uma possibilidade que auxilia os sujeitos durante a criação, verificação e validação dos modelos propostos, como também desafia a criação das ferramentas matemáticas necessárias para o estudo do contexto investigado.

3 Aporte teórico da pesquisa: segunda parte

Usou-se também como aporte teórico na pesquisa de doutorado a Epistemologia Genética de Jean Piaget. Os conceitos apresentados pelo autor influenciaram na qualidade da análise das produções dos participantes e, lançaram luz às reflexões e discussões que permearam a construção e aprendizagem da matemática. Nesta seção apresenta-se o necessário e suficiente para argumentar sobre os resultados obtidos na pesquisa.

Os estudos apresentados por Piaget (1977a, 1977b, 1978) propõem como uma condição necessária e suficiente para a construção do conhecimento a ação do sujeito sobre os objetos. A ação necessariamente parte do sujeito, e o objeto, externo ao sujeito, contribui para o processo de constituição do indivíduo. Pode-se ter ainda como objeto as ideias, pensamentos e teorias elaboradas pelo sujeito, neste caso o objeto de investigação do sujeito será interno.

Entendendo-se a ação como elemento central no processo de evolução das sucessivas tomadas de consciência pelo sujeito, Piaget propõe uma diferenciação do termo “*insight*” de “tomada de consciência”. Para o autor, o primeiro trata de uma espécie de iluminação pela qual não se acrescentam qualitativamente características ao pensamento do sujeito, diferentemente do segundo processo, que considera que existe uma evolução das formas de pensamento, fundamentado essencialmente nas ações do sujeito sobre os objetos e também nas coordenações de suas ações.

Como para Piaget sujeito e objeto são disjuntos, o autor considera que no processo de tomada de consciência existe uma região denominada periferia. É uma região limítrofe entre objeto e sujeito, na qual o conjunto das ações do sujeito sobre o objeto inicia-se com o nascimento biológico, pelo menos. Pelo fato de Piaget centralizar o

processo na ação, essa por sua vez estabelece uma ponte entre o real e a razão. Trata-se de um processo de mútua determinação entre sujeito e objeto, partindo-se de uma região periférica cuja localização é ainda desconhecida, tal como também o instante que marca o início de sua influência no processo. Porém, por meio da periferia é possível que se comece a atividade de mobilização e organização das mais diversas formas de pensamento em busca do objetivo (veja Fig. 1).

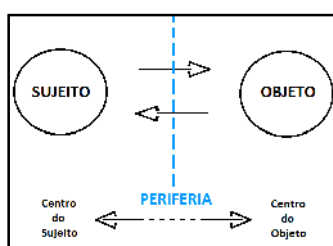


Fig. 1. A Relação sujeito-objeto. Fonte: Piaget (1977b, p.199)

Piaget (1977b) considera que o processo da tomada de consciência por meio das ações possa ser caracterizado por níveis correlativos e sequenciais. Cada um dos níveis por sua vez pode apresentar diferentes subníveis, nos quais os sujeitos podem ser caracterizados de acordo com os seus êxitos e justificativas dados em cada ação diante do objeto. Com isso, o sujeito manifesta por meio de suas ações a caracterização de determinado nível, no qual ele se aproxima mais do centro do objeto e a apropriação das suas ações torna o processo em busca do objetivo mais eficiente. Sobre os avanços na direção dos centros, o que se dispõe como ferramenta de análise para o sujeito é: o objetivo e o resultado obtido pela sua ação.

Conforme se avança qualitativamente e os resultados obtidos pela ação são organizados e interpretados por meio das coordenações inferenciais realizadas pelo sujeito, desencadeia-se um processo no qual o sujeito organiza seus esquemas assimiladores, compondo uma estrutura capaz de construir e mobilizar novos esquemas na busca de compreensão do objeto (Piaget, 1977b). Logo, a tomada de consciência não decorrente somente da simples ação do sujeito sobre o objeto, mas sim de uma complexa reorganização de suas estruturas de pensamento, criação de novos esquemas assimiladores, aperfeiçoamento da regulação ativa (fonte criadora das novidades), retirada de informações sobre a ação, organização das informações obtidas na ação e de equilíbrios/desequilíbrios parciais ocorridos ao longo do processo.

Para Piaget (1977a) o verbo abstrair significa retirar, extrair, e neste caso tem-se que a abstração consiste no processo de retirada de qualidades dos objetos (abstração empírica) ou também de retirada de qualidades das coordenações de ações (abstração reflexionante). Vale mencionar que no estudo da matemática a pseudo-empíria se faz presente, ao passo que a extração das características atribuídas pelos sujeitos contribui para elaborações mais complexas e que generalizam as qualidades, enriquecendo assim o objeto de estudo. Logo, para Piaget (1977a) a abstração pseudo-empírica também se constitui como uma categoria de abstração reflexionante.

À medida que se aumenta o número de abstrações do sujeito durante o processo interativo sujeito-objeto, a qualidade de seu pensamento evolui devido ao progresso da abstração reflexionante e as sucessivas tomadas de consciência que daí decorre.

À luz desse referencial teórico nota-se que o conhecimento matemático seja construído por abstração reflexionante, sobretudo da pseudo-empírica.

A abstração reflexionante tem duas características essenciais para a compreensão sobre como os níveis de abstração e tomada de consciência progridem no decorrer da ação. Trata-se dos processos de reflexionamento e reflexão. Sobre isso, Piaget (1977a) afirma:

Lembremo-nos, igualmente, de que a abstração reflexionante comporta sempre, dois aspectos inseparáveis: de um lado, “reflexionamento” (*réfléchissement*), ou seja, a projeção (como através de um refletor) sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior e, de outro lado, uma “reflexão” (*réflexion*), entendida esta como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior. (PIAGET, 1977a, p.274)

A união da reflexão e do reflexionamento constitui uma estrutura capaz de não apenas passar de um nível para o seguinte, mas juntas tem o caráter de uma estrutura capaz de desenvolver características qualitativas superiores no decorrer das passagens, ou projeções. Isso significa que os patamares superiores alcançados pelo sujeito pela ação e coordenação de suas ações tem relação intrínseca com os patamares inferiores ou iniciais desenvolvidos de ação.

Portanto, por meio de sucessivas operações de reflexão e reflexionamento torna-se possível ao sujeito avançar na direção dos patamares superiores de abstração e tomadas de consciência de maior qualidade. A reorganização e coordenação de suas ações permitem qualificar cada vez mais a sua ação na busca pela compreensão do objeto, ou seja, a evolução da abstração reflexionante é um processo pelo qual o sujeito constrói, reconstrói, organiza e reorganiza os seus esquemas e estruturas de pensamento a todo o momento.

Mencionou-se anteriormente sobre a tomada de consciência que a mesma apresenta níveis que progressivamente evoluem conforme aumenta a intensidade da interação entre sujeito e objeto. Pode-se afirmar que esses níveis estão em correspondência biunívoca com o processo de abstração, ao passo que a abstração, caracterizada pela tomada de consciência, independente do nível que o sujeito está cognitivamente é chamada de abstração refletida. Essa última é o produto de uma abstração reflexionante que se tornou consciente. As pesquisas apresentadas por Piaget (1977a) mostram que para atingir tal patamar de abstração o sujeito deve passar por etapas que são necessárias e graduais, nas quais, a cada novo desafio, o sujeito é desequilibrado e deve se reorganizar de tal forma a superar as contradições e dificuldades que surgem na interação. A maneira de promover por parte do sujeito o avanço ao longo dos diferentes níveis é por meio do desenvolvimento da regulação ativa, ou seja, desafiar a criação e desenvolvimento de novidades frente às diversas situações.

Frente ao referencial teórico estudado para a tese de doutorado e apresentado nessas duas últimas seções construiu-se com devida fundamentação a proposta de atividade. Na próxima seção disserta-se sobre os materiais e métodos utilizados durante as três etapas da pesquisa de doutorado.

4 Fundamentos metodológicos: materiais e métodos

A partir do uso do *software* GeoGebra e de um desenho metodológico³ inspirado nas ideias da Engenharia Didática francesa de Artigue (1996) foram construídos e disponibilizados no repositório virtual do GeoGebra dois objetos virtuais, “Cadeia de Markov – 2D” e “Cadeia de Markov – 3D” (ver Fig. 2 e Fig. 3.). Cada um deles tem dois ambientes de trabalho que, nas figuras abaixo, foram indicados por “A” e “B”.

No espaço “A” é oportunizado ao sujeito que está manipulando os objetos virtuais visualizar geometricamente o que ocorre com a representação do vetor envolvido nos cálculos. O espaço da parte “B” consiste em uma janela predominantemente algébrica, onde há parâmetros que podem ser modificados e, consequentemente, alteram os resultados visualizados em “A”. Em “B” é oportunizado ao sujeito explore a operação de potenciação envolvendo matrizes quadradas de ordem dois e três. Ainda é possível explorar o conceito de escala, e suas consequências no estudo de situações-problema.

Ambos os objetos foram construídos e disponibilizados na internet, para que qualquer pessoa interessada no assunto possa acessar e conhecer. Vale ressaltar que durante os experimentos didáticos dois e três realizados, respectivamente, com estudantes do ensino médio e ensino superior, todas as atividades propostas foram realizadas fazendo uso dos objetos virtuais pela internet. Em momento algum o site onde eles estão hospedados teve problema técnico ou falha detectada, mostrando assim estabilidade no uso deste material pela web. No primeiro experimento didático da tese foi usado um protótipo de objetivo virtual, acessado pelos participantes no formato *offline*. Durante a aplicação das atividades, nos três experimentos, os registros produzidos pelos participantes foram feitos em papel, para que posteriormente fossem realizadas as análises pelos pesquisadores.

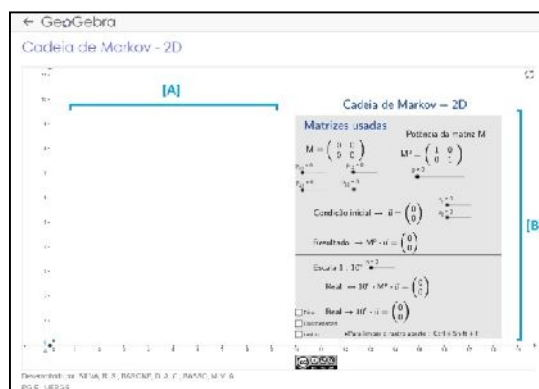


Fig. 2. Layout do objeto virtual Cadeia de Markov – 2D. Disponível em: <http://tube-beta.geogebra.org/material/simple/id/860625> (acesso em julho de 2017)

³ Para conhecer os detalhes sobre o desenho metodológico indica-se a leitura dos capítulos quatro e seis da tese de Silva (2015).

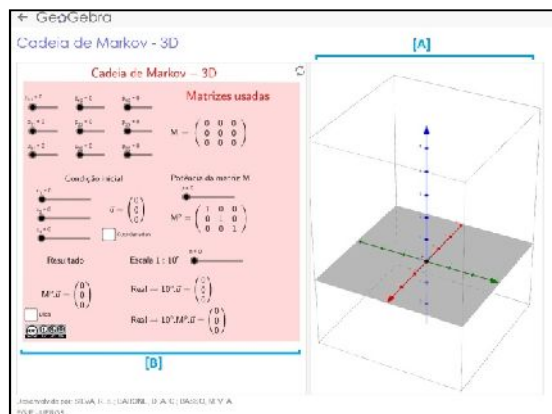


Fig. 3. Layout do objeto virtual Cadeia de Markov – 3D. Disponível em: <http://tube-beta.geogebra.org/material/simple/id/1519869> (acesso em julho de 2017)

A realização do experimento piloto ocorreu em 2014 com um conjunto de 20 participantes, constituídos por estudantes de graduação em Licenciatura em Matemática e professores de matemática da região de Passo Fundo (RS). A proposta ocorreu por meio de uma oficina pedagógica intitulada “Cadeias de Markov e Geogebra: modelagem matemática e possibilidades para a construção de conceitos através do uso de objetos virtuais”, em um congresso⁴ na Universidade de Passo Fundo (UPF). Inicialmente, a proposta do minicurso consistiu em apresentar uma situação-problema na qual se buscou, através de sucessivos questionamentos, verificar se o objeto virtual poderia contribuir na construção de uma solução para a questão central.

A oficina pedagógica, que ocorreu no laboratório de informática da instituição sede do evento, foi organizada ao longo de três momentos: (Parte 1) Motivação: problema inicial; (Parte 2) Explorando o objeto virtual e (Parte 3) Explorando a cadeia de Markov. Em cada uma das etapas os participantes se depararam com questionamentos que colocavam em prova as suas hipóteses e conjecturas elaboradas. Verificou-se que o conjunto de atividades aplicadas constituiu uma fonte inicial para a compreensão de como é possível por meio de uma situação-problema construir um cenário que possibilite a elaboração e construção de conceitos matemáticos e também para verificar o nível de aceitação dos participantes quanto à proposta apresentada. A tecnologia, presente no recurso utilizado, possibilitou que ao longo do exercício de sucessivas e progressivas abstrações ocorresse a aprendizagem da matemática, uma vez que as atividades exigiam do sujeito a constante ação sobre o objeto de investigação.

Após a realização do primeiro experimento, a partir das observações realizadas pelo professor-pesquisador envolvido e pelos apontamentos sugeridos pelos participantes da oficina pedagógica, foram feitas alterações nas atividades e no objeto virtual. Tais alterações tinham como objetivo tornar o objeto virtual e a sequência de ativi-

⁴ Eventos intitulados *V Jornada Nacional de Educação Matemática e XVIII Jornada Regional de Educação Matemática* que ocorreram em 2014, na cidade de Passo Fundo (RS). Disponível em: <http://www.upf.br/jem/> (acesso em julho de 2017)

dades mais qualificadas em termos de forma e conteúdo, para futura aplicação nos próximos experimentos.

Para as etapas seguintes da pesquisa considerou-se para serem investigadas duas turmas de estudantes regularmente matriculados nos cursos de Licenciatura em Matemática e Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, campus Caxias do Sul.

A aplicação da sequência de atividades, para a turma de estudantes da Licenciatura em Matemática, ocorreu durante a execução da disciplina de Modelagem Matemática sendo que a mesma foi ofertada no segundo semestre de 2015. Ao todo foram realizados cinco encontros com atividades presenciais de 3h20min, todos ocorridos em um dos laboratórios de informática da instituição. Ocorreu também uma atividade em um momento não presencial na instituição, onde os estudantes acessaram os objetos virtuais pela internet e assim puderam construir suas produções.

A turma da disciplina de Modelagem Matemática consistia em um grupo com seis estudantes, regularmente matriculados no curso de Licenciatura em Matemática sendo que metade da turma ao final do semestre (2015/2) seria egressa do curso. Os estudantes foram alocados de forma individual nos computadores, porém em diversos momentos realizaram discussões e reflexões entre si, acompanhadas pelo professor. O uso dos objetos virtuais “Cadeia de Markov – 2D” e “Cadeia de Markov – 3D” ocorreu por meio da internet e os registros escritos foram produzidos em papel, no material impresso fornecido pelo professor.

Após cada encontro o material produzido por cada um dos seis estudantes da turma foi digitalizado e armazenado pelo professor, para futura análise da produção. Sendo assim, o manuscrito individual de cada participante foi entregue de volta a cada um dos estudantes da turma. Também foi informado antecipadamente aos estudantes que o material constituiria um dos instrumentos de avaliação para a disciplina de Modelagem Matemática.

A disciplina de Modelagem Matemática na época alocada no oitavo semestre do curso de Licenciatura em Matemática tinha como objetivo principal, apresentado no Projeto Pedagógico de Curso (PPC) “discutir a filosofia científica da modelagem matemática através de problemas que se apresentam em situações concretas” (PPCa, 2011, p.61). Neste sentido, considerou-se relevante a aplicação e reflexão sobre o conhecimento matemático produzido através de uma sequência didática envolvendo Cadeias de Markov. Tal relevância justifica-se pelo fato da ementa da disciplina na época caracterizar como necessário e essencial o desenvolvimento de propostas de ensino que possam contribuir na reflexão sobre a importância do estudo e interpretação de situações envolvendo aspectos de modelagem matemática.

Para o nível básico de ensino o experimento didático ocorreu com uma turma do quarto ano do curso Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio da mesma instituição. A turma era composta por um grupo de 14 estudantes regularmente matriculados no curso Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio. No projeto pedagógico do curso, um dos objetivos na formação dos estudantes é:

O Curso Técnico em Plásticos visa formar profissionais capazes de contribuir com o desenvolvimento local e regional na sua totalidade, tanto nos aspectos sociais, políticos e econômicos. A

formação do técnico deste novo século é concebida como um *agente da construção e aplicação do conhecimento, tendo a função de organizar, coordenar, criar situações e tomar decisões* (grifo nosso). Nesse sentido, sua formação observará os princípios norteadores das Diretrizes Curriculares Nacionais para formação de profissionais técnicos de nível médio. (PPCb, 2010, p.10)

A partir do fato de se considerar essencial a discussão sobre os objetos de conhecimento investigados do ponto de vista da Modelagem Matemática, almejou-se que a discussão fosse feita também com estudantes do nível básico de ensino. O projeto pedagógico do curso, vigente na época, propunha contemplar uma formação que desafiasse os sujeitos envolvidos na construção e aplicação do conhecimento, objetivo o qual convergiu com a proposta do presente trabalho desenvolvido na tese. Buscou-se na aplicação de uma sequência de atividades, envolvendo Modelagem Matemática com Cadeias de Markov, oportunizar aos estudantes do Ensino Médio a investigação e construção de modelos matemáticos que tinham, de forma correlacionada, os seguintes conteúdos: matrizes e suas operações, vetores, probabilidade e estatística.

No projeto pedagógico do curso (PPCb, 2010, p.41) havia a intenção de que o ensino da matemática fosse capaz de envolver os estudantes no tanto no desenvolvimento de capacidades para desenvolver cálculos como colaborar na interpretação de problemas interdisciplinares e do cotidiano. Com isso, é notório destacar que a partir de uma proposta de trabalho que envolvesse uma abordagem de situações-problema sobre Modelagem Matemática com Cadeias de Markov no Ensino Médio visou-se qualificar e amplificar a formação dos estudantes, e também observar como o uso da tecnologia tinha influência na construção dos conceitos matemáticos.

A intenção foi, a partir do uso da tecnologia informática, desafiar o estudante para que se envolvesse na concepção, formulação, validação/reformulação, construção de um possível modelo matemático para as situações investigadas. A tecnologia surgiu como uma possibilidade de colaborar para que os sujeitos se envolvessem na direção da investigação sobre o conhecimento. Sendo assim considera-se que a tecnologia, com suas ferramentas e recursos, fosse além de uma facilitadora para os cálculos aritméticos, ou seja, que a partir do seu uso os estudantes do Ensino Médio se tornassem ativos no processo de construção, propondo e desenvolvendo estratégias para as eventuais tomadas de decisão e construção, validação/reformulação de suas hipóteses.

Do mesmo modo que a investigação contemplou os participantes do Ensino Superior buscou-se verificar juntamente com os estudantes do quarto ano do Ensino Médio o desenvolvimento das formas de pensamento que valorizam a qualidade hipotético-contínua. Buscou-se verificar como a tecnologia utilizada na investigação, na forma de objetos virtuais, contribuiu durante a construção e manutenção das formas de pensamento que ocorreram no processo de construção do conhecimento. Para os estudantes do quarto ano do ensino básico a aplicação da sequência de atividades ocorreu a partir de maio de 2015, nas aulas regulares da disciplina de matemática, ao longo de cinco encontros presenciais de 1h40min cada, em um dos laboratórios de informática disponíveis na instituição. Os estudantes foram alocados de forma individual nos computadores, porém em diversos momentos realizaram discussões e reflexões entre si, acompanhadas pelo professor. O uso do objeto virtual “Cadeias de Mar-

kov – 2D” ocorreu com acesso pela internet e os registros escritos foram produzidos pelos estudantes de forma individual em papel, no material fornecido pelo professor ao longo das aulas.

Após cada encontro o material produzido por cada estudante foi digitalizado e armazenado pelo professor, para futura análise da produção. Sendo assim, o manuscrito individual de cada participante foi entregue de volta para cada um dos quatorze estudantes da turma. Também foi informado antecipadamente aos estudantes que o material constituiria um dos instrumentos de avaliação para o segundo trimestre do ano letivo de 2015.

5 Um recorte dos achados da pesquisa

Faz-se nesta seção um recorte dos achados da pesquisa de doutorado à luz do referencial teórico estudado e apresentado anteriormente, mais especificamente nas ideias de Piaget. Como a análise publicada originalmente na tese é demasiadamente longa e densa, escolheu-se refletir e dissertar sobre momentos que ocorreram ao longo da pesquisa, nos três momentos de experimentação didática, e que tem aderência ao que foi mostrado nas seções de fundamentação teórica desse manuscrito.

Sobre as produções advindas após a realização do primeiro experimento didático ocorrido na oficina pedagógica do congresso, as seguintes reflexões foram propostas:

- 1) Os sujeitos envolvidos com a proposta não “pensavam” matematicamente de maneiras ou modos iguais. Ou seja, sujeitos diferentes pensam de formas e desenvolvem estratégias diferentes diante de uma mesma situação-problema;
- 2) A construção do modelo matemático investigado passou por sucessivos e graduais avanços na direção do conhecimento envolvendo o objeto de estudo;
- 3) O uso da tecnologia digital contribuiu positivamente para o desenvolvimento das atividades pelos sujeitos, pois permitiu que eles se concentrassem exclusivamente na investigação e deduções envolvendo a situação-problema;
- 4) A passagem pelos níveis iniciais da abstração e tomadas de consciência elementares foram necessárias. Verificou-se que não é possível elaborar uma regra matemática de forma direta, sem antes ter experimentado e relacionado características observadas de forma empíricas e pseudo-empírica envolvendo o problema;
- 5) Foi possível perceber que a elaboração de um modelo matemático é fruto da evolução de tomadas de consciência superiores derivadas de abstrações refletidas. O sujeito que conseguiu expressar algum modelo matemático na sua totalidade, mesmo que essa totalidade não representasse a realidade na sua integridade, foi capaz de compreender que o seu modelo construído se aplicava para todos os casos iniciais investigados.

Analisou-se, neste primeiro experimento, a produção sob o aspecto da elaboração e construção de conhecimento pelos sujeitos, buscando refletir sobre a possível manifestação da abstração reflexionante e de tomada de consciência durante o processo. Verificou-se que a construção do conhecimento matemático proposto na discussão das atividades realizadas com o experimento foi influenciada diretamente por: ações

do sujeito sobre o objeto virtual utilizado e também pela ação derivada das coordenações de ações do sujeito, constituindo um processo de construção ou reconstrução de ideias, criação ou validação de hipóteses e manutenção de um processo argumentativo capaz de produzir e expressar possíveis explicações para as situações-problema.

Sobre os materiais produzidos pelos estudantes do Ensino Médio (experimento dois), inicialmente reflete-se que cada sujeito seja o resultado de uma quantidade inestimável de reflexões/reflexionamentos, abstrações/tomadas de consciência que são realizadas ao longo da vida. Todas as atividades praticadas pelos sujeitos, por meio de suas ações, são influenciadas pelo grau de envolvimento e profundidade com que o sujeito explora os objetos em estudo. Ou seja, por meio das ações e coordenações de ações pode-se aperfeiçoar a qualidade do pensamento. Tal aperfeiçoamento permite que diante de uma situação nova ou desafio proposto, o sujeito desenvolva estratégias que convergem para a solução dos impasses. Neste caso, a mobilização de diferentes esquemas assimiladores combina-se com as estruturas já organizadas pelo sujeito, na criação de novidades; ou regulações ativas; que são capazes de atribuir ao pensamento uma qualidade específica dos seres humanos: a criatividade.

Ao longo da escolarização cada sujeito organiza o processo de construção de conhecimento, derivando-se assim inúmeras formas e processos de aprendizagem. Acredita-se que a criatividade mencionada no parágrafo anterior, cumpra uma função essencial no desenvolvimento das habilidades cognitivas. A função é que por meio da criatividade seja possível do sujeito estruturar (reestruturar) e organizar (reorganizar) formas de pensamento. Aliado ao processo criativo está a evolução da tomada de consciência e da abstração, enquanto reflexionante, que são dois elementos que influenciam diretamente na capacidade de resolver impasses e desafios impostos pelos objetos.

Logo, por meio das produções feitas pelos estudantes do Ensino Médio, ao longo do segundo experimento da tese, perceberam-se diferentes caminhadas percorridas por estes ao longo de um processo individual de aprendizagem. Tal como mencionado nas análises do experimento anterior, diferentes noções e percepções sobre generalidades foram manifestadas nas respostas dos participantes, reafirmando a discussão feita até agora, a qual atribui qualidade na expressão do pensamento, como sendo o produto de uma construção gradual e sucessiva, própria da atividade cognitiva do sujeito.

E por fim, quanto ao terceiro experimento, realizado com estudantes da graduação em Licenciatura em Matemática, sobre as soluções propostas para as atividades inicia-se com a seguinte reflexão: primeiramente, diante de uma situação nova que se impõe ao sujeito, é necessário mobilizar diferentes esquemas e estruturas de pensamento que possam agir na elaboração de regulações ativas (novidades), as quais são ferramentas necessárias para o aperfeiçoamento de estruturas e construção de novos esquemas, já melhorados em relação aos pré-existentes.

Isso nos permite afirmar que as respostas fornecidas pelos sujeitos no momento do terceiro experimento demonstram que, ao “experimentalizar” as situações-problema, os participantes puderam inferir e relacionar diferentes etapas para a mesma situação analisada. A capacidade de relacionar ações ou ideias aparentemente isoladas é uma atividade cognitiva essencial do sujeito, e possível devido à evolução da abstração e da tomada de consciência ao longo de um determinado processo.

Em segundo lugar, a evolução da abstração e da tomada de consciência por parte do sujeito está relacionada com a ação e com a coordenação das ações sobre os objetos, sejam materiais ou mentais, em estudo. Com isso, acredita-se que pelo fato, na época do terceiro experimento, dos sujeitos da pesquisa estar frequentando a disciplina de Modelagem Matemática, alocada no oitavo semestre do curso de Licenciatura em Matemática da instituição pesquisada, já tenha sido oportunizado aos estudantes vivenciar inúmeras situações e encarar (superando ou não) inúmeros desafios ao longo do curso de graduação. Tais oportunidades ao serem convertidas em trabalho cognitivo oportunizaram e possibilitaram que a tomada de consciência e a abstração se aperfeiçoassem em níveis cada vez mais elaborados e complexos, possibilitando aos participantes evoluir qualitativamente formas e estruturas de pensamento, conforme observado a partir das produções individuais.

6 Considerações e projeções

Considera-se que tecnologias digitais desempenharam importantes funções durante a pesquisa de doutorado, dentre as quais se destacam: construtora, colaborativa e inovadora. Sobre a *função construtora*, fez-se uso das tecnologias digitais na concepção e construção dos objetos virtuais (Cadeia de Markov – 2D, Cadeia de Markov – 3D) utilizados nas sequências de atividades. Sem os recursos tecnológicos não seria possível construir o material virtual utilizado durante a pesquisa. A *função colaborativa* emerge diante dos relatos observados na literatura consultada, onde se constatou aderência e convergência quanto ao agir dos sujeitos enquanto faziam uso da tecnologia. Ao fazer uso de recursos tecnológicos durante a investigação de diversas situações-problema notou-se em todos os experimentos que o foco dos sujeitos estava na criação/validação, aperfeiçoamento e reformulação das hipóteses, sendo destinado ao computador realizar os procedimentos de execução aritmética. Com isto, a tecnologia surge como uma aliada pela qual o sujeito centra-se predominantemente no processo de atividade cognitiva. Quanto à *função inovadora* considera-se que por meio da tecnologia foi possível de alguma forma inovar pela criação e desenvolvimento de objetos virtuais que ainda não existiam e serviriam para uma abordagem envolvendo Cadeias de Markov. Acredita-se que tal função representa ou expressa, de alguma forma, o conceito de regulação ativa proposto por Piaget, constituindo-se numa essência individual por parte do sujeito.

Retornando à questão norteadora da pesquisa, a qual consistia em tentar responder: *Como evolui a abstração refletida (abstração reflexionante com tomada de consciência), na construção de conceitos matemáticos durante a exploração de situações-problemas de modelagem matemática com Cadeias de Markov em uma sequência didática usando objetos virtuais?* Constatou-se a partir dos três experimentos didáticos que a ação do sujeito, em suas mais diversas evocações e tipos (materiais ou mentais), aliada à coordenação das mesmas, durante a exploração das situações-problema na tentativa de resolver os desafios e impasses que se colocavam pela diversidade dos objetos, fez com que a cada novo avanço uma reorganização parcial por parte do sujeito ocorresse. Notou-se, a partir dos experimentos, que a evolução e aperfeiçoamento dos níveis de abstrações e tomadas de consciência estava diretamente

relacionado com a criação/validação ou reformulação de hipóteses previamente elaboradas pelos sujeitos, provenientes da organização/reorganização cognitiva, onde na gênese havia a criação e o desenvolvimento dos novos e mais potentes esquemas assimiladores. Tais esquemas, por sua vez, colaboraram nas operações de reflexionamento e reflexão, possibilitando ao sujeito aperfeiçoar suas estruturas cognitivas. Neste fluxo de constante e gradual aperfeiçoamento, quanto mais elaboradas as abstrações e tomadas de consciência melhores foram as projeções para patamares superiores, oportunizando uma possível reestruturação da estrutura cognitiva dos sujeitos, quando observados sob termos qualitativos. Por sua vez, a considerada reestruturação da estrutura cognitiva somente ocorreu mediante as coordenações de ações que deviam ser cada vez mais potenciais, a ponto que o sujeito às executasse em nível de metarreflexão, em que o objeto, sobre o qual se pratica as ações estivesse predominantemente no plano do pensamento.

Considerando-se os fatos apresentados anteriormente, então a partir da possível combinação dos fatores e aperfeiçoamento do processo descrito antes tenha sido oportunizado aos sujeitos desenvolver e aprimorar uma nova qualidade de pensamento denominada de *hipotético-contínuo*. Ou seja, da relação entre a *continuidade* no processo de abstração (aperfeiçoamento dos esquemas assimiladores, modificação/aperfeiçoamento das estruturas cognitivas) e do processo de *aperfeiçoamento e construção de hipóteses* ocorreu o desenvolvimento dessa nova forma de pensamento. Verificou-se que a cada modificação na tela do computador (via mudança de parâmetros, por exemplo) houve uma reorganização dos esquemas, estabelecimento de novas abstrações que agiram na direção da formação de novas hipóteses, as quais avançaram de modo dinâmico e iterativo, promovendo assim uma reorganização ou reestruturação das estruturas qualitativamente melhores para o sujeito.

Referências

1. ALLEVATO, N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, São Paulo (2005).
2. ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na educação básica. Contexto. São Paulo (2012).
3. ARAÚJO, J. L. Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo (2002).
4. ARTIGUE, M. Engenharia Didática. Didáctica das Matemáticas (Dir, Jean Brun). Trad. Maria José Figueiredo. Instituto Piaget, Horizontes Pedagógicos, Lisboa (1996).
5. BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática. Contexto, São Paulo (2002).
6. BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelagem Matemática no ensino. 5ª edição. Contexto, São Paulo (2011).
7. BORSSOI, A. H. Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Londrina (UEL). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina (2013).

8. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília (2013).
9. D'AMBROSIO, U. Educação Matemática: da teoria à práxis. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Papirus, Campinas (1996).
10. MALHEIROS, A. P. S. A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo (2004).
11. PIAGET, J. Abstração reflexionante; relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. 1977a. Tradução de Fernando Becker e Petronilha B. G. da Silva. Artes Médicas, Porto Alegre (1995).
12. PIAGET, J. A Tomada de Consciência. 1977b. Tradução de Edson Braga de Souza. Editora da Universidade de São Paulo. Melhoramentos, São Paulo (1977).
13. PIAGET, J. Fazer e Compreender. 1978. Tradução de Christina Larroudé de Paula Leite. Editora da Universidade de São Paulo. Melhoramentos, São Paulo (1978).
14. POWELL, A. B. Construção Colaborativa do Conhecimento Tecnológico, Pedagógico e do Conteúdo de Professores de Matemática. GEPEM – Grupos de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática. (Online). n. 64 – Jan./Jun. (2014).
15. PPCa. Projeto Pedagógico de Curso: Licenciatura em Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul. Caxias do Sul (2011).
16. PPCb. Projeto Pedagógico de Curso: Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul. Caxias do Sul (2010).
17. SILVA, R. S. Cadeias de Markov e Modelagem Matemática: da Abstração Pseudo-empírica à abstração Refletida com uso de objetos virtuais. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Porto Alegre (2015).
18. SOARES, D. S. Uma abordagem pedagógica baseada na análise de modelos para alunos de biologia: qual o papel do software? Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (UNESP). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo (2012).
19. SOISTAK, A. V.. Uma experiência com a modelagem matemática no Ensino Médio Profissionalizante. In: Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica. BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Org.). Editora UEPG. Ponta Grossa (2010).
20. SKOVSMOSE, O. Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. Cortez, São Paulo (2007).
21. TALL, D.; DUBINSKY, E. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: Tall D. O. (org.), Advanced Mathematical Thinking, pp. 231–248. Kluwer, Holanda (1991).
22. TALL, D. Using the computer as an environment for building and testing mathematical concepts: A Tribute to Richard Skemp. Papers in Honour of Richard Skemp, pp. 21–36, Warwick (1986).
23. TALL, D. Technology and Cognitive Growth in Mathematics. A discussion paper for the Conference on Mathematics and New Technologies Thessaloniki. pp.18–20. Grécia (1999).